

А.П. Норден

ПРОСТРАНСТВА
АФФИННОЙ
СВЯЗНОСТИ



А. П. Норден

ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1976

517.4

H82

УДК 513.731

Александр Петрович Норден

ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

М., 1976 г., 432 стр. с илл.

Редактор *В. В. Гольдберг*

Техн. редактор *Н. В. Кошелева*

Корректоры *Т. С. Плетнева, А. Л. Ипатова*

Сдано в набор 3.03.1976 г.

Подписано к печати 30.08.1976 г.

Бумага 84×108¹/₃₂.

Физ. печ. л. 13,5.

Условн. печ. л. 22,63.

Уч.-изд. л. 20,45.

Тираж 5000 экз.

Т-15753.

Цена книги 1 р. 45 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Головное предприятие республиканского производственного объединения
«Полиграфкнига» Госкомиздата СССР, г. Киев, Довженко, 3

Отпечатано с матриц во 2-ой тип. изд-ва «Наука»,
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10. Зак. 1238

Н $\frac{20203-120}{053(02)-76}$ 51-76

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1976,
с изменениями

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	7
Предисловие к первому изданию	8
Г л а в а I. Векторное и аффинное пространство	11
§ 1. Векторное пространство	11
§ 2. Ковариантные векторы	15
§ 3. Преобразование координат	19
§ 4. Тензоры и действия над ними	20
§ 5. Координаты тензоров	26
§ 6. Основной тензор	29
§ 7. Поливекторы	32
§ 8. Аффинор	35
§ 9. Тензоры, зависящие от параметра	38
§ 10. Геометрия группы преобразований	40
§ 11. Аффинное пространство	41
§ 12. Центроаффинное пространство	46
§ 13. Эквиаффинное пространство	47
§ 14. Евклидово пространство	48
§ 15. Кривые и поверхности аффинного пространства	51
§ 16. Криволинейные координаты в R_n	56
Г л а в а II. Проективное пространство	59
§ 17. Проективное пространство	59
§ 18. Пространство гиперплоскостей	63
§ 19. Коррелятивное соответствие	66
§ 20. Проективная геометрия на прямой	73
§ 21. Геометрия кубической бинарной формы	78
§ 22. Пространство K_n	81
§ 23. Пространство K_n с невырожденным абсолютom	85
§ 24. Аффинная подгруппа проективной группы	89
§ 25. Проективная схема евклидова пространства	92
§ 26. Сферы в пространстве Евклида E_n	95
§ 27. Стереографическая проекция	98
§ 28. Конформное пространство	101
§ 29. Конформная интерпретация пространства K_n	107
Г л а в а III. Пространство аффинной связности	109
§ 30. Дифференцируемое многообразие	109
§ 31. Аффинная связность вдоль кривой	114
§ 32. Пространство аффинной связности	121
§ 33. Кривизна и кручение	124

§ 34.	Преобразование связности	127
§ 35.	Пространство без кручения	130
§ 36.	Пространство нулевой кривизны	133
§ 37.	Смешанное дифференцирование	136
§ 38.	Индукированная связность	139
§ 39.	Геодезические линии	144
Г л а в а IV. Специальные связности и их преобразования		148
§ 40.	Полусимметрическая связность	148
§ 41.	Эквивариантная связность	150
§ 42.	Метрическое пространство	151
§ 43.	Пространство Римана	157
§ 44.	Конформное соответствие	160
§ 45.	Конформно-евклидово пространство	164
§ 46.	Геодезическое отображение	165
§ 47.	Проективно-евклидово пространство	168
§ 48.	Проективно-евклидово пространство Вейля	170
§ 49.	Связность, допускающая абсолютный параллелизм направлений	171
§ 50.	Сопряженные связности	172
§ 51.	Сопряженные связности без кручения	176
§ 52.	Составное преобразование	178
§ 53.	Специальные пары сопряженных связностей	181
§ 54.	Понятие расслоенного пространства и обобщение понятия связности	188
§ 55.	Дифференцирование псевдовеличин	191
Г л а в а V. Связность на поверхностях проективного пространства		193
§ 56.	Кривые и поверхности проективного пространства	193
§ 57.	Нормализованные поверхности проективного пространства	197
§ 58.	Внутренняя связность нормализованной поверхности	200
§ 59.	Подчиненная нормализация	203
§ 60.	Основные уравнения нормализованной поверхности	204
§ 61.	Замена нормализации	207
§ 62.	Нормализованное пространство	210
§ 63.	Гиперповерхность проективного пространства	216
§ 64.	Нормализованная гиперповерхность	219
§ 65.	Основные уравнения нормализованной гиперповерхности	222
§ 66.	Гармонизм и сопряженность	229
§ 67.	Взаимные нормали	232
§ 68.	Средние нормали	234
§ 69.	Проективный линейный элемент	237
§ 70.	Общая нормализация пары гиперповерхностей	240
§ 71.	Аффинная нормализация	242
§ 72.	Сопряженная аффинная нормализация	246
Г л а в а VI. Полярная нормализация		250
§ 73.	Линейный элемент проективной метрики	250
§ 74.	Полярные нормализации	251

§ 75. Внешняя полярная нормализация	253
§ 76. Полярная нормализация пространства	255
§ 77. Евклидова нормализация	257
§ 78. E_1 как нормализованное пространство гиперплоскостей	260
§ 79. Внутренняя полярная нормализация	263
§ 80. Нормализованная гиперповерхность второго порядка	266
§ 81. Обратные нормализации гиперповерхности второго порядка	270
§ 82. Кривые и поверхности конформного пространства	272
§ 83. Нормализованная поверхность конформного пространства	274
§ 84. Нормализованное конформное пространство	278
§ 85. Нормализация семейством сфер	280
§ 86. Внутренняя связность пространства, нормализованного связкой сфер	283
Г л а в а VII. Пространство двух измерений	290
§ 87. Аффинная связность A_2	290
§ 88. Связность Вейля W_2	291
§ 89. Изотропные направления метрики Вейля	294
§ 90. Векторное поле в W_2	298
§ 91. Конформное отображение	302
§ 92. Тензор кривизны W_2	305
§ 93. Геометрия сетей	308
§ 94. Индикатриса сети	311
§ 95. Специальные сети A_2	314
§ 96. Сопряженные связности в X_2	318
§ 97. Некоторые свойства линий и сетей по отношению к паре связностей	321
§ 98. Специальные пары связностей в X_2	323
§ 99. Сети в W_2	331
§ 100. Конформно-чебышевский и геодезический вектор сети	333
§ 101. Специальные сети в W_2	337
§ 102. Специальные сети в V_2	340
§ 103. Проективное отображение A_2	345
§ 104. Приложение к теории поверхностей в E_3	349
Г л а в а VIII. Поверхности трехмерного проективного пространства	353
§ 105. Нормализованная поверхность в P_3	353
§ 106. Сети на нормализованной поверхности	358
§ 107. Ось и ребро сети	363
§ 108. Аффинная нормализация поверхности R_3	366
§ 109. Расслаиваемая пара конгруэнций	368
§ 110. Главные линии нормализованной поверхности	369
§ 111. Инварианты сопряженной сети	372
§ 112. Внутренние инварианты сопряженной сети	375
§ 113. Специальные сопряженные сети	380
§ 114. Особые евклидовы нормализации	384

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 115. Проективное изгибание	390
§ 116. Линии Сегре и Дарбу	392
§ 117. Канонический пучок	394
§ 118. Специальные типы поверхностей	398
Г л а в а IX. Поверхности трехмерного конформного про- странства	401
§ 119. Основные уравнения поверхности	401
§ 120. Направляющий круг последовательности сфер	403
§ 121. Круги, ортогональные поверхности	404
§ 122. Основные тензоры поверхности	407
§ 123. Фокальные точки нормализующего круга	411
§ 124. Гармоническая нормализация	412
§ 125. Нормализация, определяемая касательными сфе- рами	415
§ 126. Нормализация, определенная сетью	417
§ 127. Канонические круги	419
§ 128. Поверхности пространства постоянной кривизны	421
Литература	424
Предметный указатель	425

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В те годы, когда вышло первое издание этой книги, нередко можно было слышать о близком «конце геометрии». Время полностью опровергло эти пессимистические прогнозы. Геометрия бурно развивается, но теперь, как и прежде, понятие связности является одним из наиболее важных.

Понятие это, именно вследствие его важного значения, нельзя вводить походя, между прочим, как это делается в некоторых новых руководствах. Для своего усвоения оно нуждается в элементарном, но подробном и хорошо иллюстрированном примерами изложении, что и следует считать задачей этой книги.

Содержание книги и ее план остались почти неизменными по сравнению с первым изданием. Изъяты только § 76 и § 77, касающиеся пространств с вырожденной метрикой, теория которой, как нам представляется, до сих пор имеет слишком специальный интерес.

Что касается метода изложения, то он изменен только незначительно в том, что касается собственно понятия аффинной связности. Зато в новом издании нами вводится понятие векторного расслоения и теория «продолженного дифференцирования», как частный одномерный пример такого расслоения. Это позволило существенно перестроить изложение основ теории нормализаций и значительно упростить основные уравнения и условия их интегрируемости. Такие упрощения, пожалуй, возможны и в теории сетей; работа в этом направлении только начата, и ее результаты еще не созрели для включения в книгу.

В заключение я хотел бы выразить глубокую благодарность моим ученикам и коллегам, которые приняли участие в просмотре рукописи и ее оформлении, а также отредактировали некоторые части. Особую благодарность хочу

выразить Г. В. Бушмановой и безвременно скончавшемуся В. И. Шуликовскому, а также А. С. Подковырину, С. С. Саакян, Г. Н. Тимофееву, В. Е. Фомину, А. П. Широкову и В. В. Шурыгину.

5.1.1975 г. Казань

А. П. Норден

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Знакомство с основами геометрии аффинной связности является в настоящее время необходимой составной частью специального геометрического образования. Однако это обстоятельство до сих пор не нашло отражения в учебной литературе. Всякому, знакомому с переведенной на русский язык книгой Схоутена и Стройка, ясно, что она не может служить учебником. Немногим лучше обстоит дело и с литературой на иностранных языках.

Задачей предлагаемой монографии является, прежде всего, заполнить указанный пробел и дать такое руководство, которым аспиранты-геометры могли бы пользоваться при подготовке соответствующих разделов аспирантского минимума и по которому аспиранты других специальностей и студенты-геометры старших курсов могли бы знакомиться с основами многомерной и тензорной геометрии.

Чтение книги не требует от читателя почти никаких предварительных сведений, но зато предполагает такую степень его развития, которая связана с усвоением физматовских курсов анализа, алгебры, дифференциальной и проективной геометрии. Предварительное знакомство с курсом римановой геометрии (по книге П. К. Рашевского) не обязательно, но, несомненно, желательно.

Я перейду теперь к изложению плана книги. Первая глава содержит необходимые сведения по теории векторов, тензоров и геометрии многомерного аффинного пространства. После нее читатель, желающий ограничиться минимумом сведений, может прямо перейти к чтению третьей главы, содержащей определения и изложения общих свойств пространств аффинной связности, и закончить изучением четвертой главы, посвященной важнейшим частным случаям таких пространств и их преобразованиям.

Первая, третья и четвертая главы представляют собою законченное целое, изучением которого могут ограничиться аспиранты, не специализирующиеся по тензорной геометрии. При этом они могут также выпустить §§ 50—53 четвертой главы, посвященные сопряженным связностям и имеющие более специальное значение.

Во второй главе, необходимой для понимания всех глав, начиная с пятой, излагаются основы многомерной проективной геометрии, а также геометрий аффинного, эквиваффинного, центроаффинного, неевклидова, евклидова и конформного пространств, рассматриваемых как пространства подгрупп проективной группы. Эта глава представляет и самостоятельный интерес, так как связное изложение всего указанного материала тоже отсутствует в нашей учебной литературе.

Главы книги, начиная с пятой, излагают приложения общих методов аффинной связности к конкретным вопросам и, прежде всего, к теории поверхностей. В пятой главе излагается общая теория нормализованных поверхностей многомерного проективного пространства и их внутренних аффинных связностей, а также ее специализация на случаи гиперповерхности, нормализованного пространства и поверхностей аффинного и центроаффинного пространств.

В шестой главе содержатся дальнейшие специализации общей схемы предыдущей главы, позволяющие получить в виде ее частных случаев теории поверхностей неевклидова, евклидова и конформного пространств, а также интерпретацию конформно-евклидовых геометрий.

Седьмая глава посвящена аффинной связности пространств двух измерений и теории сетей этих пространств. Эта теория, созданная Я. С. Дубновым и разработанная им главным образом для случая римановых пространств, излагается здесь в общих предположениях, делающих ее более полной и увеличивающих область ее приложений. Читатель, специально заинтересованный вопросами теории сетей, может обратиться к седьмой главе сразу после прочтения первых четырех, включив также § 50—53.

Наконец, восьмая и девятая главы содержат изложение теории поверхностей трехмерного проективного и конформного пространств и основаны на всем предыдущем материале.

Знакомство с основами многомерной геометрии поверхностей проективного, аффинного, центроаффинного, неевклидова, евклидова и конформного пространств, с теорией сетей и с теорией поверхностей трехмерного проективного и конформного пространств необходимо всякому аспиранту, специализирующемуся по дифференциальной геометрии. Поэтому вторая часть книги не только дает материал для приложения общих методов, но также имеет самостоятельное значение как пособие при подготовке аспирантов.

Теория нормализованных поверхностей, на основе которой достигается объединение всех отмеченных выше теорий, впервые появляется в печати в таком подробном виде, как она представлена в этой книге. В особенности это относится к главам пятой и шестой, содержащим полные системы основных уравнений и условий их интегрируемости нормализованной поверхности n -мерного проективного пространства, публикуемые впервые. Изложение теории сетей аффинного пространства, основанной на теории сопряженных связностей, тоже является новым. Последние две главы содержат в переработанном виде результаты, уже опубликованные автором.

Размеры книги не позволили поместить в ней изложение теории поверхностей биаксиального и лагеррова пространств, а также изложение теории симметрических пространств с ее приложениями к теории непрерывных групп, как это предполагалось первоначально.

Список литературы, помещенной в конце книги, не претендует на полноту, отсылая читателя к таким источникам, в которых он найдет подробные литературные указания.

Я выражаю свою благодарность редактору книги И. М. Яглому за сделанные им замечания и исправления, а также аспиранту Г. С. Бархину, оказавшему мне существенную помощь при просмотре рукописи и чтении корректур.

Февраль 1950 г. Казань

А. П. Норден

ГЛАВА I

ВЕКТОРНОЕ И АФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО

§ 1. Векторное пространство

Мы охарактеризуем *вектор* как элемент некоторого многообразия B_n , называемого *векторным пространством*, подчиняющийся определенной системе аксиом *).

I. В пространстве B_n определено действие *сложения векторов*, относящее всяким двум векторам третий так, что при этом имеет место:

а) *переместительный закон*, согласно которому

$$a + b = b + a;$$

б) *сочетательный закон*, согласно которому

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c;$$

с) *условие разрешимости*, согласно которому уравнение

$$a + x = b$$

всегда разрешимо и определяет x единственным образом. Мы будем называть решение этого уравнения *разностью* между b и a и обозначим

$$x = b - a.$$

Решение уравнения $a + x = a$ существует в силу предыдущего. Это решение мы будем называть *нуль-вектором* и обозначать $a - a = 0$. Нетрудно показать, что нуль-вектор не зависит от вектора a , фигурирующего в его определении, т. е. $a - a = b - b$. Введем также обозначение $0 - a = -a$ и будем называть векторы a и $-a$ *противоположными*, имея в виду, что $-(-a) = a$.

II. В векторном пространстве определено действие *умножения вектора на число*, которое относит данному

*) Вопрос о независимости этой системы нами не ставится.

числу λ и вектору a некоторый вектор $b = \lambda a$ так, что при этом имеют место:

а) *сочетательный закон*, согласно которому

$$\lambda (\mu a) = (\lambda \mu) a;$$

б) *распределительный закон по отношению к числовому множителю*, согласно которому

$$\lambda (a + b) = \lambda a + \lambda b;$$

с) *распределительный закон по отношению к векторному множителю*, согласно которому

$$(\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a;$$

д) *правило умножения на 0-число*:

$$0 \cdot a = 0;$$

е) *правило умножения на единицу*:

$$1 \cdot a = a.$$

Из предыдущих правил легко следует правило умножения на -1 , характеризующееся равенством

$$(-1) a = -a,$$

и правило умножения на 0-вектор:

$$\lambda 0 = 0.$$

Линейной комбинацией векторов называют сумму произведений этих векторов на числа. Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все ее числовые коэффициенты равны нулю. Если нетривиальная линейная комбинация некоторой группы векторов $a, b, \dots, h$ равна нулю, то говорят, что эти векторы находятся в линейной зависимости.

Понятие линейной зависимости позволяет ввести важное понятие о *размерности* векторного пространства, или о числе его измерений.

Векторное пространство называется *n-мерным*, если: 1) векторы всякой группы, состоящей из $n + 1$ элемента, находятся в линейной зависимости; 2) существуют такие n векторов, которые независимы между собою, т. е. не находятся в линейной зависимости *). Группа n векторов,

*) Элементарная векторная алгебра, в которой всякий вектор соответствует некоторому направленному отрезку, дает нам примеры векторных пространств различных размерностей. Направленные отрезки прямой, плоскости и трехмерного пространства образуют векторное пространство одного, двух и трех измерений соответственно.

не находящихся в линейной зависимости, которая, согласно определению, существует в векторном пространстве B_n n измерений, называется *базисом* этого пространства.

Покажем, что *всякий вектор x пространства B_n можно выразить в виде линейной комбинации базисных векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$, т. е. векторов, образующих базис. Действительно, согласно пункту 1) определения размерности*

$$\lambda x + \lambda^k a_k = 0^*),$$

так как группа векторов $x, a_1, \dots, a_n$ состоит из $n + 1$ элемента; но $\lambda \neq 0$, так как в противном случае комбинация $\lambda^k a_k$ должна была бы быть нетривиальной и последнее равенство выражало бы линейную зависимость векторов базиса. Но если $\lambda \neq 0$, то

$$x = x^k a_k, \quad (1)$$

где

$$x^k = -\frac{1}{\lambda} \lambda^k.$$

Коэффициенты разложения данного вектора x по векторам базиса, т. е. числа x^k , называются *координатами вектора x* по отношению к этому базису. В дальнейшем мы будем обозначать координаты вектора той же буквой, что и вектор, с индексом справа, причем индекс показывает номер того базисного вектора, при котором координата является коэффициентом в разложении вектора.

Рассмотрим группу векторов $x, y, \dots, z$, находящихся в линейной зависимости:

$$\lambda x + \mu y + \dots + \nu z = 0,$$

и выразим каждый из них через координаты. Последнее равенство примет вид

$$\lambda x^k a_k + \mu y^k a_k + \dots + \nu z^k a_k = 0,$$

или

$$(\lambda x^k + \mu y^k + \dots + \nu z^k) a_k = 0.$$

*) Как обычно, мы опускаем знак суммы, если индекс суммирования встречается дважды и на разных уровнях.

В силу независимости векторов базиса линейная комбинация в левой части должна быть тривиальной, так что

$$\lambda x^k + \mu y^k + \dots + \nu z^k = 0,$$

и мы приходим к следующей теореме:

Для того чтобы векторы находились в линейной зависимости, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие координаты находились в той же линейной зависимости.

Отметим важнейшие следствия этой теоремы.

1. *Соответствующие координаты двух равных векторов равны между собой, или иначе: координаты вектора по отношению к данному базису определяются однозначно.*

2. *Координаты суммы векторов равны сумме соответствующих координат этих векторов.*

3. *При умножении вектора на число координаты вектора умножаются на то же число.*

П р и м е ч а н и е. Свойства координат тесно связаны с возможностью доказательства существования и единственности принятой нами системы аксиом. Неопределимому понятию вектора приписывается арифметический смысл совокупности n чисел, расположенных в определенном порядке, а векторные действия сложения и умножения на числа истолковываются как соответствующие арифметические действия над числами, определяющими вектор. При таком истолковании векторного пространства аксиомы I и II выполняются. Векторы

$$a_1(1, 0, \dots, 0), \quad a_2(0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad a_n(0, 0, \dots, 1)$$

составляют базис, а всякие векторы в числе $n + 1$ находятся в линейной зависимости.

Легко доказать, что базис B_n не определяется однозначно. Действительно, рассмотрим n векторов $b_1, b_2, \dots, b_n$, и пусть они выражаются через векторы базиса следующим образом:

$$b_i = p_i^k a_k. \quad (2)$$

Рассмотрим уравнение

$$\lambda^i b_i = 0,$$

которое, вследствие предыдущей теоремы, равносильно системе

$$\lambda^i p_i^k = 0.$$

Эта система имеет нетривиальные решения только при условии

$$\text{Det} \| p_i^k \| = 0,$$

так что мы можем сформулировать следующий результат:

Соотношения (2) определяют переход от базиса a_i к другому базису b_i тогда и только тогда, когда

$$\text{Det} \| p_i^k \| \neq 0. \quad (3)$$

Переход к новому базису сопровождается преобразованием координат. Обозначая новые координаты через $\check{x}^i$, получим

$$\check{x}^i b_i = x^k a_k,$$

или

$$\check{x}^i p_i^k a_k = x^k a_k.$$

Вследствие того, что координаты определяются однозначно, мы будем иметь соотношения

$$x^k = p_i^k \check{x}^i, \quad (4)$$

которые и являются формулами преобразования координат вектора, соответствующего преобразованию базиса по формулам (2).

§ 2. Ковариантные векторы

Будем говорить, что в векторном пространстве B_n задана скалярная функция α векторного аргумента x , если всякому значению x поставлено в соответствие некоторое число

$$z = \alpha(x).$$

Функция $\alpha(x)$ называется *линейной*, если при любых значениях x , y , λ выполняются условия

$$\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y), \quad (A)$$

$$\alpha(\lambda x) = \lambda \alpha(x). \quad (B)$$

Вместо того, чтобы говорить о задании линейной вектор-функции, мы будем говорить, что нам задан *линейный оператор* α , обозначая

$$\alpha(x) = \alpha x.$$

При этом мы будем там, где это возможно, обозначать линейные операторы полужирными буквами греческого алфавита. Значение z результата воздействия оператора α на вектор x удобно будет назвать *следом* *) *оператора α на векторе x* . Свойства линейности (A) и (B) можно выразить равенством

$$\alpha(\lambda x + \mu y) = \lambda \alpha x + \mu \alpha y,$$

смысл которого передает следующая формулировка: *след оператора α на линейной комбинации векторов равен линейной комбинации следов того же оператора на комбинируемых векторах*.

Определим действия над операторами. Прежде всего условимся, что операторы α и β *равны между собою*, если их следы на каждом векторе x равны между собою. Таким образом, равенство

$$\alpha = \beta$$

равносильно тождественному равенству

$$\alpha x \equiv \beta x.$$

Назовем оператор γ *суммой операторов α и β* , если след γ на всяком векторе x равен сумме следов α и β на том же векторе, так что равенство

$$\gamma = \alpha + \beta$$

равносильно тождеству

$$\gamma x \equiv \alpha x + \beta x.$$

Будем говорить, что *оператор α умножен на число λ* , если его след на любом векторе умножен на это число. Таким образом, равенство

$$\beta = \lambda \alpha$$

и тождество

$$\beta x \equiv \lambda \alpha x$$

равносильны.

*) Часто его называют значением функции α на векторе x .

Заметим, что сложение и умножение операторов на число не нарушают их линейности.

Назовем, наконец, *нуль-оператором* такой оператор ω , след которого на всяком векторе x равен нулю.

Введенные понятия позволяют определить *линейную комбинацию* и *линейную зависимость операторов* совершенно так же, как это было сделано в предыдущем параграфе для векторов.

Легко убедиться в том, что при наличии введенных определений для линейных операторов удовлетворяются все аксиомы групп I и II. Таким образом, *совокупность этих операторов может рассматриваться как векторное пространство*. Выясним, какова размерность этого векторного пространства. Для этого введем понятие *координат оператора*. Назовем *координатой оператора по отношению к данному базису векторного пространства след оператора на векторе этого базиса*. Обозначая координату той же буквой, что и оператор, но с индексом справа и снизу, согласно определению будем иметь

$$\alpha_i = \alpha a_i,$$

где a_i — вектор базиса. Оператор вполне определяется своими координатами. Действительно,

$$\alpha x = \alpha x^k a_k = x^k \alpha a_k = x^k \alpha_k,$$

и, таким образом, *след оператора на векторе равен сумме парных произведений соответствующих координат оператора и вектора*.

Если операторы $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ находятся в линейной зависимости:

$$\lambda \alpha + \mu \beta + \dots + \nu \gamma = \omega,$$

то

$$\lambda \alpha a_i + \mu \beta a_i + \dots + \nu \gamma a_i = 0,$$

или

$$\lambda \alpha_i + \mu \beta_i + \dots + \nu \gamma_i = 0.$$

Таким образом, для того чтобы операторы находились в линейной зависимости, необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие координаты находились в той же линейной зависимости.

Из этого результата следует, что всегда можно выделить группу независимых операторов $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$, для

чего достаточно считать, что координаты этих операторов α_k^i образуют матрицу, ранг которой равен n . С другой стороны, ранг матрицы, составленной из координат $n + 1$ оператора, не может превышать n . Следовательно, всякие операторы в числе $n + 1$ находятся в линейной зависимости.

Присоединив последний результат к предыдущим, сформулируем следующее предложение:

Линейные операторы n -мерного векторного пространства сами образуют n -мерное векторное пространство.

Таким образом, можно считать линейные операторы векторами. Однако, вообще говоря, у нас нет оснований для установления взаимно однозначного соответствия между векторами исходного пространства и векторами-операторами, т. е. мы должны считать те и другие принадлежащими различным пространствам. Чтобы подчеркнуть это различие, векторы исходного пространства называют *контравариантными*, а векторы-операторы — *ковариантными* векторами. Векторы одинаковой природы принято также называть *когреддиентными*, а векторы различной природы — *контрагреддиентными*. Чтобы избежать этой тяжелой терминологии, отбросим первые прилагательные, называя просто *векторами* элементы исходного пространства и *ковекторами* — векторы-операторы.

Координаты ковекторов введены нами так, что они представляют собою следы данного ковектора на векторах базиса исходного пространства, однако их можно ввести еще и другим способом. Для этого рассмотрим n ковекторов α^i , определенных условием

$$\alpha^i a_j = \delta_j^i,$$

где a_j — базисные векторы, а $\delta_j^i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j \end{cases}$ — символ Кронекера. Так как

$$\text{Det } \parallel \delta_j^i \parallel = 1 \neq 0,$$

то ковекторы α^i независимы и образуют *базис*, который мы будем называть *взаимным* по отношению к базису a_i . Разложим некоторый ковектор ξ по этому базису:

$$\xi = \xi_k^* \alpha^k,$$

Но, с другой стороны,

$$\xi_i = \xi a_i = \xi_k^* \alpha^k a_i = \xi_k^* \delta_i^k = \xi_i^*.$$

Таким образом, *координаты ковектора, определенные относительно некоторого векторного базиса, суть коэффициенты разложения этого ковектора по ковекторам базиса, взаимного данному.*

В заключение выведем формулы преобразования координат ковектора при преобразовании (1, 2) *);

$$\check{\xi}_k = \xi b_k = \xi p_k^i a_i = p_k^i \xi a_i,$$

ИЛИ

$$\check{\xi}_k = p_k^i \xi_i. \quad (1)$$

Аналогично формулам (1, 4) для α^i - и β^i -базисов, соответственно взаимных a_i и b_i , будем также иметь

$$\alpha^i = p_k^i \beta^k. \quad (2)$$

§ 3. Преобразование координат

В этом параграфе мы составим сводку всех формул преобразования координат векторов и ковекторов, приведя их к более удобному и легко запоминаемому виду и дополнив некоторыми новыми соотношениями.

Пусть в векторном пространстве даны два базиса, которые мы будем различать, условно называя один из них старым, а другой — новым. Обозначим векторы старого базиса через a_i , а векторы нового — через $a_{i'}$, относя штрих к индексам. Аналогично будем обозначать ковекторы базисов, взаимных данным, через α^i и $\alpha^{i'}$ соответственно, а новые и старые координаты вектора x и ковектора ξ — соответственно через x^i , $x^{i'}$ и ξ_i , $\xi_{i'}$. В таком случае

$$x^i a_i = x^{i'} a_{i'}, \quad \xi_i \alpha^i = \xi_{i'} \alpha^{i'}.$$

Разлагая векторы нового базиса по векторам старого, обозначим коэффициенты разложения через $A_{i'}^i$, так что

*) Здесь и в дальнейшем при ссылках на формулы из предшествующих параграфов первая цифра в круглых скобках означает номер параграфа, вторая — номер формулы в этом параграфе.

формулы (1, 2) примут вид

$$a_{i'} = A_{i'}^i a_i. \quad (1)$$

Так как $\text{Det} \| A_{i'}^i \| \neq 0$, то уравнения (1) можно разрешить относительно a_i , и при соответствующем обозначении коэффициентов будем иметь

$$a_i = A_i^{i'} a_{i'}. \quad (2)$$

Подставляя в правую часть выражение для $a_{i'}$ и меняя индекс суммирования, получим

$$a_i = A_i^{i'} A_{i'}^k a_k,$$

откуда следует, что

$$A_i^{i'} A_{i'}^k = \delta_i^k \quad (3)$$

и, аналогично,

$$A_i^{i'} A_i^{k'} = \delta_{i'}^{k'}. \quad (4)$$

Как показывают последние формулы, матрицы $A_{i'}^i$ и $A_i^{i'}$ взаимно обратны, т. е. каждый элемент одной из них равен приведенному минору соответствующего элемента другой, т. е. алгебраическому дополнению этого элемента, деленному на определитель матрицы.

Теперь без труда можно записать формулы для прямых и обратных преобразований координат:

$$x^{i'} = A_{i'}^i x^i, \quad x^i = A_i^{i'} x^{i'}, \quad (5)$$

$$\alpha^{i'} = A_{i'}^i \alpha^i, \quad \alpha^i = A_i^{i'} \alpha^{i'}, \quad (6)$$

$$\xi_{i'} = A_{i'}^i \xi_i, \quad \xi_i = A_i^{i'} \xi_{i'}. \quad (7)$$

§ 4. Тензоры и действия над ними

Обобщая понятие линейной функции от вектора, мы будем рассматривать такие функциональные зависимости, которые относят системе значений ряда векторных и ко-векторных переменных $x, y, \dots, z; \xi, \eta, \dots, \zeta$ скаляр w . Функция

$$w = \Phi(x, y, \dots, z; \xi, \eta, \dots, \zeta)$$

называется *полилинейной*, если она линейна относительно каждого входящего в нее переменного, т. е. удовлетворяет

для каждого из переменных (например, x) тождеству

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda x_1 + \mu x_2, y, \dots, z; \xi, \eta, \dots, \zeta) = \\ = \lambda \Phi(x_1, y, \dots, z; \xi, \eta, \dots, \zeta) + \mu \Phi(x_2, y, \dots, z; \\ \xi, \eta, \dots, \zeta). \end{aligned}$$

Вместо того, чтобы говорить о функции векторных аргументов, будем говорить об *операторе*, соответствующем этой функции, обозначая эти операторы, так же как и функции, большими буквами греческого алфавита, хотя, как правило, мы будем пользоваться в дальнейшем другими обозначениями, которые будут установлены ниже. Если функция полилинейна, то оператор называется *тензором* *).

Будем называть *следом* **) *тензора на системе его векторных аргументов* значение соответствующей функции, отвечающее данным значениям этих аргументов.

Тензоры следует различать по числу аргументов соответствующей функции и ко- или контравариантному характеру этих аргументов. Это различие приводит нас к понятию *валентности* тензора. Тензор называется s -валентным, если s есть число указанных аргументов. Однако удобнее считать число s составным и записывать его в виде $s = p + q$, где p — число ковариантных, а q — число контравариантных аргументов. Про такой тензор валентности $p + q$ говорят также, что это *смешанный* тензор типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, p раз контравариантный и q раз ковариантный. Тензоры типа $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$ называют просто контравариантными, а тензоры типа $\begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$ — ковариантными.

Мы можем теперь же привести примеры тензоров всех трех указанных видов. Рассмотрим след ковектора ξ на векторе x :

$$w = \xi x.$$

*) Иногда вместо термина «тензор» употребляют термин «аффи-нор», сохраняя первый для некоторого частного вида аффино-ров. Мы не будем придерживаться этой терминологии.

**) Иногда вместо термина «след» говорят о *значении тензора на системе векторов*.

Предполагая x переменным, а ξ постоянным, получим линейную функцию одного контравариантного переменного.

Таким образом, *ковектор ξ есть тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, или ковариантный одновалентный тензор.*

Считая, наоборот, ξ переменным, а x постоянным, будем иметь линейную функцию одного ковариантного переменного, и, таким образом, *вектор x есть тензор типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, или контравариантный одновалентный тензор.*

Наконец, мы можем рассматривать след ξx как функцию обоих векторов: ξ и x . Так как эта функция полилинейна, то ей соответствует тензор типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; он называется *единичным тензором*.

Таким образом, мы видим, что понятие тензора обобщает понятие вектора и содержит последнее как весьма специальный частный случай. Естественно попытаться распространить на тензор определение действий, которые вводятся для векторов. Мы определим также другие действия над тензорами, характерные для тензоров высших валентностей.

Прежде всего, назовем два тензора *равными между собою*, если их следы на всякой системе векторов совпадают между собою, т. е. имеет место тождественное равенство

$$\Phi(x, y, \dots; \xi, \eta, \dots) \equiv \Psi(x, y, \dots; \xi, \eta, \dots).$$

Очевидно, понятие равенства имеет смысл только для тензоров одного и того же типа.

1. **Сложение тензоров.** Рассмотрим два тензора Φ и Ψ одного и того же типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ и сложим их следы на одной системе векторных аргументов. Мы получим функцию того же ряда векторных аргументов, которая, очевидно, будет полилинейной и, следовательно, тоже определит тензор X той же составной валентности, что и данная; назовем его *суммой данных тензоров*.

Определение можно записать в виде следующего равенства, тождественного относительно векторных

аргументов:

$$\begin{aligned} \{\Phi + \Psi\}(x, y, \dots, z; \xi, \eta, \dots, \zeta) &\equiv \\ &\equiv \Phi(x, y, \dots, z; \xi, \eta, \dots, \zeta) + \\ &+ \Psi(x, y, \dots, z; \xi, \eta, \dots, \zeta). \end{aligned}$$

2. У м н о ж е н и е т е н з о р а н а ч и с л о. Умножая след тензора на векторных аргументах на некоторое число, мы получим новую полилинейную функцию тех же аргументов. Тензор, соответствующий этой новой функции, называется *произведением данного тензора на число* и определяется тождественным равенством:

$$\begin{aligned} \{\lambda\Phi\}(x, y, \dots, z; \xi, \eta, \dots, \zeta) &\equiv \\ &\equiv \lambda\Phi(x, y, \dots, z; \xi, \eta, \dots, \zeta). \end{aligned}$$

3. У м н о ж е н и е т е н з о р о в. Перемножая следы двух тензоров на системах *независимых* между собою аргументов $x, \dots; \xi, \dots$ и $s, \dots; \sigma, \dots$, мы получим функцию

$$X(x, \dots; \xi, \dots; s, \dots; \sigma, \dots),$$

зависящую от всех переменных обеих групп и линейную по отношению к каждому переменному. Тензор, соответствующий этой функции, называется *произведением данных тензоров*. Произведение тензоров определяется, таким образом, следующим равенством:

$$\begin{aligned} \{\Phi\Psi\}(x, \dots; s, \dots; \xi, \dots; \sigma, \dots) &\equiv \\ &\equiv \Phi(x, \dots; \xi, \dots) \Psi(s, \dots; \sigma, \dots). \end{aligned}$$

Заметим, что если сомножители будут типов $\binom{p}{q}$ и $\binom{p_1}{q_1}$, то произведение будет типа $\binom{p+p_1}{q+q_1}$. В частности, произведение векторов приводит нас уже к тензору, валентность которого равна числу перемножаемых векторов.

Нетрудно убедиться, что умножение тензоров подчиняется сочетательному закону и распределительному закону по отношению к сложению, причем число следует рассматривать как тензор валентности 0. Иначе, чем в алгебре, однако, обстоит дело с переместительным законом *).

*) Разумеется, для тензоров различных валентностей сам вопрос о переместительности не имеет смысла.

Пусть нам даны теперь два тензора одного и того же типа. Мы можем сопоставить им два произведения:

$$\begin{aligned}\{\Phi\Psi\}(x, \dots; \xi, \dots; s, \dots; \sigma, \dots) &\equiv \\ &\equiv \Phi(x, \dots; \xi, \dots) \Psi(s, \dots; \sigma, \dots), \\ \{\Psi\Phi\}(x, \dots; \xi, \dots; s, \dots; \sigma, \dots) &\equiv \\ &\equiv \Phi(s, \dots; \sigma, \dots) \Psi(x, \dots; \xi, \dots).\end{aligned}$$

Таким образом, произведение тензоров одного и того же типа зависит от порядка их перемножения.

4. С в е р т ы в а н и е т е н з о р о в. Заменим в выражении функции

$$w = \Phi(x, y, \dots; \xi, \eta, \dots)$$

часть ее аргументов постоянными векторами или ко векторами. После такой замены получим функцию меньшего числа аргументов, например:

$$\Psi(y, \dots; \eta, \dots) \equiv \Phi(a_i, y, \dots; \alpha, \eta, \dots),$$

где a и α — постоянные векторы. Будем называть тензор Ψ , соответствующий этой новой функции, *частичным следом* тензора Φ на векторах a и α . Таким образом, *частичный след* тензора на векторах есть тензор, валентность которого меньше валентности данного тензора на число, равное числу этих векторов. Рассмотрим совокупность частичных следов некоторого смешанного тензора на соответствующих векторах некоторого базиса a_i и взаимного ему базиса α^i и просуммируем все эти следы. Мы получим функцию

$$\Psi(y, \dots; \eta, \dots) \equiv \Phi(a_i, y, \dots; \alpha^i, \eta, \dots),$$

которую сравним с такой же функцией

$$\Psi'(y, \dots; \eta, \dots) \equiv \Phi(a_{i'}, y, \dots; \alpha^{i'}, \eta, \dots),$$

образованной по отношению к некоторому другому векторному базису $a_{i'}$ и взаимному ему базису $\alpha^{i'}$. Но вследствие формул преобразования (3,1), (3,6) и линейности функции Φ имеем

$$\begin{aligned}\Phi(a_{i'}, y, \dots; \alpha^{i'}, \eta, \dots) &= A_{i'}^i A_k^{i'} \Phi(a_i, y, \dots; \alpha^k, \eta, \dots) = \\ &= \delta_k^i \Phi(a_i, y, \dots; \alpha^k, \eta, \dots) = \Phi(a_i, y, \dots; \alpha^i, \eta, \dots).\end{aligned}$$

Таким образом, тензор Ψ не зависит от выбора базиса, и мы будем говорить, что он получен *свертыванием* тензора Φ по двум аргументам соответствующей полилинейной функции.

Процесс свертывания можно продолжать до тех пор, пока в выражении функции остаются свободные пары контрагredientных переменных. Если числа ко- и контравариантных переменных одинаковы, то, свертывая по всем парам, получим число, которое иногда называют *следом тензора**).

О *свертывании двух тензоров* говорят, когда свертывается их произведение по переменным, каждое из которых входит в один из сомножителей. С этой точки зрения след тензора на некотором векторе (или ковекторе) есть результат свертывания произведения тензора и вектора (или ковектора).

5. А л ь т е р н и р о в а н и е и с и м м е т р и р о в а н и е. Если полилинейная функция содержит два или более когredientных переменных, то перестановка двух или нескольких из значений этих переменных, вообще говоря, изменяет значение этой функции. В таком случае, умножая эти значения на некоторые числа и складывая их между собою, мы можем получить новую полилинейную функцию тех же переменных. Так, например, задав функцию $\Phi(x, y)$, можно получить из нее функцию

$$\Psi(x, y) = \lambda \Phi(x, y) + \mu \Phi(y, x).$$

Таким образом, мы можем переходить от одного тензора к другому, причем бесчисленным множеством способов, если принять во внимание произвол в выборе коэффициентов.

Особое значение, однако, имеют два способа. Первый из них носит название *симметрирования* тензора и состоит в том, что значения функции, соответствующие всем возможным перестановкам p данных переменных, складываются и вся сумма делится на $p!$. Так, например,

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z) = \frac{1}{3!} [\Phi(x, y, z) + \Phi(y, z, x) + \Phi(z, x, y) + \\ + \Phi(z, y, x) + \Phi(y, x, z) + \Phi(x, z, y)]. \end{aligned}$$

*) Этот термин не может вызвать путаницы, так как в предыдущих случаях всегда говорилось о следах тензоров на векторах и ковекторах.

Процесс *альтернирования* тензора состоит в том, что та же сумма берется с чередующимися знаками перед слагаемыми, причем знак плюс ставится перед теми из них, которые соответствуют четным перестановкам переменных, т. е. перестановкам с четным числом инверсий, а знак минус — перед теми слагаемыми, которые соответствуют нечетным перестановкам (перестановкам с нечетным числом инверсий). Так, например, функция $\Psi_1(x, y, z)$, соответствующая альтернированию тензора Φ , будет иметь вид

$$\Psi_1(x, y, z) = \frac{1}{3!} [\Phi(x, y, z) + \Phi(y, z, x) + \Phi(z, x, y) - \\ - \Phi(z, y, x) - \Phi(y, x, z) - \Phi(x, z, y)].$$

Те тензоры, которые не изменяются от симметрирования по векторным переменным, называются *симметричными* по отношению к этим переменным. Альтернирование симметричного тензора дает тождественный нуль. Тензоры, не меняющиеся при альтернировании по своим переменным, называются *кососимметричными* по этим переменным. Их симметрирование по тем же переменным тоже дает нуль.

Если ковариантный или контравариантный тензор кососимметричен по всем своим переменным, то он называется *поливектором*.

§ 5. Координаты тензоров

Большое разнообразие в структуре тензоров требует для их различения особой системы обозначений. К этой системе мы приходим, вводя понятие *координат тензора*. Пусть в B_n задан базис a_i , взаимный ему базис α^i и некоторая полилинейная функция

$$w = \Phi(x, \dots, z; \xi, \dots, \zeta).$$

Предполагая, что аргументы принимают значения, совпадающие со значениями различных векторов взаимных базисов, мы получим систему величин

$$A_i^p \dots_k^r = \Phi(a_i, \dots, a_k; \alpha^p, \dots, \alpha^r),$$

которые будут зависеть от: 1) выбора тензора, 2) выбора базиса и 3) выбора номеров у векторов основного базиса

и ковекторов взаимного базиса. Эти величины и называют *координатами тензора*. Итак, *координаты тензора* (относительно данного базиса) *равны его следам на системе векторов, принадлежащих данному базису и взаимному базису*.

Очевидно, для векторов и ковекторов новое определение координат совпадает с тем, которое мы вводили ранее.

Нетрудно видеть, что координаты тензора полностью определяют этот тензор, т. е. определяют его след на каждой системе векторных аргументов (см. ниже формулу (5)).

В качестве примера двухвалентного тензора рассмотрим единичный тензор, определенный в § 4. Его координаты

$$A_i^j = a_i \alpha^j,$$

или, согласно § 2,

$$A_i^j = \delta_i^j.$$

Итак, *координаты единичного тензора выражаются символом Кронекера*.

Переходя к общему случаю, мы видим, что в обозначении координат число нижних индексов показывает ковариантную, а число верхних индексов — контравариантную валентность тензора. Таким образом, координатное обозначение тензора отражает его природу. В дальнейшем мы, как правило, и будем пользоваться этим обозначением.

Все векторные действия тоже весьма просто и удобно выражаются через координаты:

1. При сложении тензоров их соответствующие координаты складываются, так что если $C = A + B$, то

$$C_i^{p \dots r} = A_i^{p \dots r} + B_i^{p \dots r}. \quad (1)$$

2. При умножении тензора на число все координаты тензора умножаются на это число, так что если $B = \lambda A$, то

$$B_i^{p \dots r} = \lambda A_i^{p \dots r}. \quad (2)$$

3. При умножении двух тензоров их координаты с индексами, выбранными независимо друг от друга, перемножаются между собою, так что если $C = A \cdot B$, то

$$C_a^{i \dots j} b_{p \dots r}^{u \dots w} = A_a^{i \dots j} \cdot B_{p \dots r}^{u \dots w}. \quad (3)$$

4. Координаты свернутого тензора равны сумме координат с одинаковыми индексами, соответствующих тем переменным, по которым происходит свертывание. Так, если

$$B(y, \dots; \eta, \dots) = A(a_k, y, \dots; \alpha^k, \eta, \dots),$$

то

$$B_j^{i\dots} = A_k^h j^{i\dots} \quad (4)$$

В частности, след тензора типа $\binom{p}{q}$ на векторах $x, y, \dots$ $\dots; \xi, \eta, \dots$ имеет вид

$$A(x, y, \dots; \xi, \eta, \dots) = A_i^p j^{s\dots r}_k x^i y^j \dots \xi_p \eta_s \dots, \quad (5)$$

т. е. представляет собою полилинейную форму $p + q$ рядов переменных, выражающих координаты p векторов и q ковекторов, причем коэффициенты этой формы равны координатам тензора.

5. При альтернировании и симметрировании тензора происходит линейное комбинирование его координат с соответственно переставленными индексами. В случае симметрирования коэффициенты этой комбинации все равны $\frac{1}{p!}$, где p — число переставляемых индексов, а в случае альтернирования они равны $\frac{1}{p!}$ при четных и $-\frac{1}{p!}$ при нечетных перестановках. Так, например, для тензора, рассмотренного в пункте 5 предыдущего параграфа,

$$A_{(ijk)} = \frac{1}{3!} (A_{ijk} + A_{jki} + A_{kij} + A_{kji} + A_{jik} + A_{ikj}), \quad (6)$$

$$A_{[ijk]} = \frac{1}{3!} (A_{ijk} + A_{jki} + A_{kij} - A_{kji} - A_{jik} - A_{ikj}), \quad (7)$$

где круглые скобки, окружающие индексы, служат знаком симметрирования, а квадратные — знаком альтернирования. По поводу этих обозначений нужно еще заметить, что если между индексами, участвующими в симметрировании и альтернировании, находятся индексы, не участвующие в них, то такие индексы помещают между прямыми чертами. Так, например,

$$A_{(i|jkl|)} = \frac{1}{2!} (A_{ijkl} + A_{ljki}). \quad (8)$$

Мы будем называть *кратным следом* тензора на векторе x тензор

$$A_{i\dots k}{}^q{}_{p\dots} x^i \dots x^k = B_p{}^q{}_{\dots}.$$

Предположим, что этот тензор обращается в нуль тождественно по отношению к выбору вектора x . Очевидно, $B_p{}^q{}_{\dots}$ есть форма относительно переменного x^i , причем коэффициенты этой формы равны $A_{(i\dots k)}{}^q{}_{p\dots}$, где симметрирование распространено на все индексы, по которым происходило свертывание. Тождественное равенство нулю формы $B_p{}^q{}_{\dots}$ равносильно соотношениям

$$A_{(i\dots k)}{}^q{}_{p\dots} = 0. \quad (9)$$

Итак, мы приходим к следующему результату: для того чтобы кратный след тензора на любом векторе был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы этот тензор обращался в нуль после симметрирования по тем индексам, по которым происходило его свертывание с вектором.

В заключение получим формулы преобразования координат тензора при изменении базиса. Для этого заменим в правой части выражения

$$B_i{}^p{}_{\dots k}{}^r = B(a_i, \dots, a_k; \alpha^p, \dots, \alpha^r)$$

векторы базиса и ковекторы взаимного базиса на векторы и ковекторы новых взаимных базисов. Пользуясь линейностью функции B , получим сейчас же

$$B_i{}^p{}_{\dots k}{}^r = A_p{}^{p'} \dots A_r{}^{r'} A_i{}^{i'} \dots A_k{}^{k'} B_{i'}{}^{p'}{}_{\dots k'}{}^{r'}. \quad (10)$$

Таким образом, старые координаты тензора выражаются через его новые координаты линейно и однородно с коэффициентами, равными произведениям соответствующих коэффициентов разложения векторов одного базиса по векторам другого.

§ 6. Основной тензор

Пусть в B_n нам задан симметричный дважды ковариантный тензор g_{ij} , т. е. симметричный тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Мы будем называть его *неособенным*, если его *дискриминант*,

т. е. определитель матрицы его координат, отличен от нуля;

$$g = \text{Det} \| g_{ij} \| \neq 0. \quad (1)$$

Рассмотрим систему приведенных миноров матрицы $\| g_{ij} \|$. Обозначим их через g^{ij} , с теми же индексами, что и соответствующий элемент, и покажем, что они являются координатами тензора. По свойству приведенных миноров

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j. \quad (2)$$

Пусть две пары контрагredientных векторов связаны соотношением

$$\xi_i = g_{ik} x^k, \quad \eta_i = g_{ik} y^k. \quad (3)$$

Вследствие (2)

$$x^k = g^{ki} \xi_i \quad (4)$$

но в таком случае величина

$$w = g^{ki} \xi_k \eta_i = g^{ki} g_{kl} g_{ij} x^l y^j = g_{lj} x^l y^j$$

не зависит от выбора базиса, т. е. является полилинейной функцией ковекторов, и потому g^{ki} есть дважды контравариантный тензор, т. е. тензор типа $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Тензор g^{ki} , удовлетворяющий условию (2), называется *обратным* тензору g_{ij} . Очевидно, тензор g^{ki} симметричен.

Соотношения (3) или равносильные им соотношения (4) устанавливают взаимно однозначное соответствие между векторами и ковекторами пространства B_n . Условимся обозначать соответствующие векторы и ковекторы одной и той же буквой, полагая

$$x_k = g_{ki} x^i, \quad x^i = g^{ik} x_k. \quad (5)$$

Более того, полезна точка зрения, при которой вектор x^i и ковектор x_i считаются тождественными. Однако очевидно, что при этом величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $x^1, x^2, \dots, x^n$, вообще говоря, различны, и мы продолжаем их различать, называя *ковариантными* и *контравариантными координатами* данного вектора x .

Возможность такого отождествления сейчас же распространяется на тензоры любого типа. Будем считать тож-

дественными два тензора, если их следы на тождественных (в новом смысле) векторах равны.

Для примера рассмотрим некоторый двухвалентный тензор s_{ij} . Будем обозначать той же буквой s и считать тождественными ему тензоры s^i_j , s^j_i и s^{ij} , если для них справедливы равенства

$$s_{ij}x^i y^j = s^i_j x_i y^j = s^j_i x^i y_j = s^{ij} x_i y_j.$$

Пользуясь равенствами (5), получим следующие соотношения между ковариантными, смешанными и контравариантными координатами этого тензора:

$$s_{ij} = g_{ip} s^p_j = g^j_p s^p_i = g_{ip} g_{jq} s^{pq}_{ij}$$

или

$$s^{ij} = g^{ip} s^j_p = g^{jp} s^i_p = g^{ip} g^{jq} s_{pq}^{ij}.$$

Согласно введенному условию мы должны считать тензоры g_{ij} , g^{ij} и δ^i_j тождественными, поэтому можно кратко выразить сущность этого условия, сказав, что для отождествления контрагredientных векторов и тензоров следует выбрать ковариантный или контравариантный единичный тензор. В. Ф. Каган предложил называть такой тензор *вертором*.

Если условие (1) не выполняется, т. е.

$$\text{Det } \|g_{ij}\| = 0,$$

то все же с помощью соотношения

$$x_i = g_{ik} x^k$$

можно всякому *контравектору* (так для краткости можно называть контравариантные векторы) x^k отнести ковектор x_i , который мы будем обозначать той же буквой.

Всяким двум контравекторам x и y можно отнести их полилинейную функцию

$$xy = g_{ij} x^i y^j,$$

которую мы будем называть их *скалярным произведением* (независимо от того, выполнено ли условие (1) для основного тензора g_{ij}).

Рассмотренный способ выбора вертора не является единственным. В некоторых вопросах теории векторных пространств двух измерений бывает удобно ввести двухвалентный кососимметричный вертор (см. § 7).

§ 7. Поливекторы

Поливектором называется ко- или контравариантный тензор, кососимметричный по всем своим индексам. Согласно этому определению те координаты поливектора, которые отличаются друг от друга только порядком индексов, совпадают по абсолютной величине и отличаются знаком тогда и только тогда, когда перестановка индексов, переводящая одну координату в другую, нечетная. Кроме того, очевидно, что всякая координата поливектора равна нулю, если среди ее индексов встречаются одинаковые. Отсюда, в частности, следует, что *всякий поливектор, валентность которого больше числа измерений пространства n , равен нулю.*

Мы можем получить примеры поливекторов, рассматривая так называемые *косые произведения векторов*, т. е. выражения вида

$$e_{i_1 i_2 \dots i_k} = a_{[i_1}^1 a_{i_2}^2 \dots a_{i_k]}^k. \quad (1)$$

Не всякий поливектор может быть представлен в виде косого произведения векторов. Если это возможно, то поливектор называется *простым*.

Отметим, что косое произведение векторов равно нулю, если оно содержит два одинаковых множителя. Имея в виду это обстоятельство, а также принимая во внимание линейность косого произведения относительно каждого множителя, мы легко приходим к следующему результату: *для того чтобы векторы находились в линейной зависимости, необходимо и достаточно, чтобы их косое произведение было равно нулю.*

Поливектор валентности n называется *n -вектором*. *Существенной компонентой n -вектора* называется его координата

$$e = e_{1\ 2 \dots n}. \quad (2)$$

По общему свойству координат поливектора все остальные его координаты, не равные нулю, либо равны e , либо отличаются от нее знаком, в зависимости от четности или нечетности порядка расположения их индексов, так что

$$e_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} 0, \\ \pm e. \end{cases} \quad (3)$$

Это свойство n -вектора позволяет утверждать, что два любых n -вектора пространства B_n отличаются друг от друга только скалярным множителем, равным отношению их существенных компонент, так что

$$g_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{g}{e} e_{i_1 i_2 \dots i_n}. \quad (4)$$

Полилинейная функция, соответствующая n -вектору, кососимметрична относительно всех своих переменных. Пользуясь свойствами координат поливектора, мы можем представить ее в следующем виде:

$$z = e_{i_1 i_2 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} = n! e \sum_{(i_1 \dots i_n)} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}.$$

Здесь сумма с множителем $n!$ составлена по тому закону, который определяет составление детерминанта, поэтому

$$z = e \operatorname{Det} \| x_i^j \|, \quad (5)$$

где e — существенная компонента n -вектора.

При преобразовании базиса

$$\operatorname{Det} \| x_i^j \| = \operatorname{Det} \| A_i^j x_i^{j'} \| = \operatorname{Det} \| A_i^j \| \cdot \operatorname{Det} \| x_i^{j'} \|,$$

и мы можем сохранить формулу (5), если будем считать, что величина e преобразуется по следующему закону:

$$e' = e \operatorname{Det} \| A_i^j \|. \quad (6)$$

Величины, преобразующиеся по закону (6), называются *ковариантными плотностями*. Пользуясь этим термином, мы можем сказать, что значение кососимметрической полилинейной функции n контравекторов равно произведению ковариантной плотности на определитель, составленный из координат этих векторов.

Примером ковариантной плотности может служить величина

$$\sqrt{\sigma g} = \sqrt{\sigma \operatorname{Det} \| g_{ij} \|}, \quad (7)$$

где g_{ij} — симметричный тензор валентности два, а σ — постоянное. Если $\sigma = \pm 1$ и знак выбран так, чтобы подкоренное выражение было положительно, то соответствующий этой плотности n -вектор называется *дискриминантным n -вектором тензора g_{ij}* .

Рассмотрим бивектор ε_{ij} в B_2 с существенной компонентой ε . Его координаты образуют матрицу

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Бивектор, обратный данному, определим условиями

$$\varepsilon^{ik} \varepsilon_{kj} = \delta_j^i \quad (9)$$

или матрицей

$$\begin{vmatrix} \varepsilon^{11} & \varepsilon^{12} \\ \varepsilon^{21} & \varepsilon^{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \\ \frac{1}{\varepsilon} & 0 \end{vmatrix}, \quad (10)$$

так что он имеет существенную компоненту $\varepsilon^{21} = \frac{1}{\varepsilon}$. Используя ε_{ij} в качестве вертора, будем считать два вектора a_i и a^j тождественными, если они связаны условиями

$$a_i = \varepsilon_{ik} a^k \quad (11)$$

или равносильными им условиями

$$a^i = \varepsilon^{ik} a_k. \quad (12)$$

Соответственно будем отождествлять и тензоры произвольных валентностей.

Очевидно, любой бивектор может отличаться от ε_{ij} только числовым множителем. Если же некоторый тензор $a_{ijk...}$ произвольной валентности кососимметричен по двум своим индексам i и j , то, свернув его с произвольными векторами по всем остальным индексам, мы можем утверждать:

$$a_{ijk...} v^k \dots = \lambda \varepsilon_{ij}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon^{ji} a_{ijk...} v^k \dots = a^i{}_{ik...} v^k \dots = \lambda \varepsilon_{ij} \varepsilon^{ji} = 2\lambda,$$

или, после освобождения от произвольных векторов,

$$2a_{ijk...} = \varepsilon_{ij} a^l{}_{lk...} \quad (13)$$

Таким образом, результату альтернирования произвольного тензора по индексам i и j можно придать вид

$$2b_{[ij]k...} = \varepsilon_{ij} b^l{}_{lk...} \quad (14)$$

вследствие чего условие симметрии по этим же индексам равносильно равенству

$$b^l_{\cdot lk} \dots = 0. \quad (15)$$

В частности, для того чтобы два вектора v^i и w^j находились в линейной зависимости, необходимо и достаточно, чтобы их произведение $v^i w^j$ было симметрично. Отсюда вытекает условие линейной зависимости двух векторов:

$$v^k w_k = 0. \quad (16)$$

Если a_{ij} — симметричный тензор, то обратный ему тензор $\tilde{a}^{ij}$ определяется условием

$$\tilde{a}^{ik} a_{jk} = \delta_j^i. \quad (17)$$

С другой стороны, тензор

$$a_i^{\cdot k} a_{kj} = -a_{ik} a^{\cdot k}_j$$

кососимметричен, откуда

$$a_i^{\cdot k} a_{kj} = \lambda \varepsilon_{ij},$$

или

$$a^{ik} a_{kj} = \lambda \delta_j^i. \quad (18)$$

Сравнивая с (17), мы видим, что

$$a^{ij} = \lambda \tilde{a}^{ij}, \quad (19)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{2} a^{ij} a_{ij}. \quad (20)$$

Таким образом, если бивектор принят за вертор, то тензор, обратный данному симметричному тензору a_{ij} , отличается от него только множителем.

§ 8. Аффинор

Мы будем называть *аффинором* тензор типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. След аффинора на векторе есть вектор

$$y^i = \Phi_k^i x^k, \quad (1)$$

или, в безындексных обозначениях,

$$y = \Phi x. \quad (2)$$

Вектор $x \neq 0$ есть *вектор главного направления* для данного аффинора, если он удовлетворяет уравнению

$$\Phi x = sx. \quad (3)$$

Если вектор x удовлетворяет этому уравнению, то ему удовлетворяет и всякий вектор λx , причем число s остается неизменным и называется *собственным значением* этого главного направления. Перепишав уравнение (3) в координатах, мы будем иметь

$$(\Phi_k^i - s\delta_k^i) x^k = 0. \quad (4)$$

Для того чтобы это уравнение имело нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось *характеристическое уравнение*

$$\text{Det} \parallel \Phi_k^i - s\delta_k^i \parallel = 0. \quad (5)$$

Каждому корню характеристического уравнения соответствует главное направление, для которого этот корень является собственным значением. Собственные значения, а значит, и коэффициенты характеристического уравнения не зависят от системы координат. Вследствие этого, а также потому, что они являются рациональными функциями координат аффинора, коэффициенты характеристического уравнения называются *инвариантами аффинора*. Для нас будет важно рассмотреть один из них, а именно свободный член характеристического уравнения — инвариант

$$I(\Phi) = \text{Det} \parallel \Phi_k^i \parallel. \quad (6)$$

В дальнейшем, говоря об инварианте аффинора, мы будем иметь в виду именно этот инвариант.

Аффинор называется *неособенным*, если уравнение

$$\Phi x = 0 \quad (7)$$

имеет только нулевые решения. Характеристическое уравнение такого аффинора не может иметь нулевых корней, и, следовательно, он характеризуется условием

$$I(\Phi) \neq 0. \quad (8)$$

Находя след неособенного аффинора на линейной комбинации, мы получим линейную комбинацию следов с теми же коэффициентами. Нетрудно видеть, что для того,

чтобы векторы находились в линейной зависимости, необходимо и достаточно, чтобы следы неособенного аффинора на этих векторах находились в той же линейной зависимости. В частности, отсюда вытекает, что частичные следы неособенного аффинора Φ на векторах базиса a_k образуют новый базис

$$b_k = \Phi a_k.$$

Задавая базисы a_k и b_k произвольно, мы определим неособенный аффинор Φ , и притом единственным образом. Действительно, пусть произвольный вектор

$$x = x^k a_k.$$

В таком случае

$$\Phi x = \Phi x^k a_k = x^k \Phi a_k = x^k b_k = y$$

и мы имеем возможность отнести всякому вектору x вполне определенный вектор y , который может обратиться в нуль только при $x = 0$. Итак, аффинор вполне определяется своими частичными следами на векторах базиса, причем он будет неособенным, если его следы образуют базис.

Всякий неособенный аффинор Φ допускает существование обратного аффинора $\tilde{\Phi}$, который связан с ним зависимостью

$$\tilde{\Phi}_k^i \Phi_j^k = \delta_j^i \quad (9)$$

и координаты которого равны приведенным минорам матрицы Φ_j^k . Очевидно, понятие обратных аффиноров является взаимным.

Неполное свертывание двух аффиноров дает третий аффинор

$$X_j^i = \Phi_k^i \Psi_j^k, \quad (10)$$

называемый аффинорным произведением этих аффиноров.

Очевидно, между инвариантами рассматриваемых аффиноров имеет место следующая зависимость:

$$I(X) = I(\Phi) I(\Psi), \quad (11)$$

которая показывает, что результат аффинорного умножения двух аффиноров будет особенным тогда и только тогда, когда хотя бы один из этих аффиноров особенный.

Для взаимно обратных аффинов, согласно (9),

$$\Phi\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}\Phi = A, \quad (12)$$

где A — единичный аффинор.

Так как инвариант единичного аффинора равен единице, то произведение инвариантов обратных аффинов равно единице. Отсюда следует, в частности, что аффинор, обратный неособенному, тоже будет неособенным.

Если в пространстве B_n задан основной тензор g_{ij} , то всякий аффинор можно отождествить с дважды ковариантным тензором

$$\Phi_{ij}^{\cdot} = g_{ik}\Phi_{\cdot j}^k.$$

Два аффинора называются сопряженными по отношению к основному тензору g_{ij} , если они удовлетворяют условию

$$\Phi_{ij}^{\cdot} = \Psi_{ji}^{\cdot}. \quad (13)$$

Из очевидного соотношения

$$\text{Det} \|\Phi_{ij}^{\cdot}\| = \text{Det} \|g_{pq}\| \cdot \text{Det} \|\Phi_i^{\cdot k}\|$$

следует, что инварианты двух сопряженных аффинов равны между собою.

§ 9. Тензоры, зависящие от параметра

В ряде случаев приходится рассматривать такие тензоры, которые зависят от параметра, т. е являются функциями этого параметра. В этом случае можно говорить о бесконечно малых тензорах. Переменный тензор называется *бесконечно малым*, если его след на всякой системе постоянных векторов стремится к нулю. Из этого определения непосредственно вытекает, что бесконечно малый тензор характеризуется бесконечной малостью своих координат по отношению к любому постоянному базису.

Мы говорим, что *переменный тензор Φ стремится к постоянному тензору Φ_0 как к своему пределу, если их разность бесконечно мала.*

На основе этого можно обычным способом определить непрерывность функции, выражающей зависимость тензора от скаляра. Эта функция считается непрерывной, если

бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Производная от тензора Φ по скаляру t определяется обычным образом:

$$\Phi' = \frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t},$$

и является тензором того же типа, что и данный.

Найдем теперь производную от следа тензора Φ на постоянных векторах:

$$\frac{d}{dt} \Phi(a, \dots; \alpha, \dots) = \lim \left\{ \frac{1}{\Delta t} \Delta \Phi(a, \dots; \alpha, \dots) \right\}.$$

По свойству сложения и умножения тензора на число имеем

$$\frac{1}{\Delta t} \Delta \Phi(a, \dots; \alpha, \dots) = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}(a, \dots; \alpha, \dots),$$

где $\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ есть тензор, равный отношению разности приращенного и первоначального значений тензора к приращению аргумента, но, согласно определению бесконечной малости и предела,

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}(a, \dots; \alpha, \dots) - \Phi'(a, \dots; \alpha, \dots) \rightarrow 0,$$

поэтому

$$\frac{d}{dt} \{ \Phi(a, \dots; \alpha, \dots) \} = \Phi'(a, \dots; \alpha, \dots).$$

Итак, *производная от следа данного тензора на постоянных векторах равна следу тензора производной данного тензора на тех же векторах.*

Пользуясь этим результатом, легко показать, что при дифференцировании тензоров имеют место обычные правила:

$$1. \quad \frac{d}{dt} (\Phi + \Psi) = \frac{d\Phi}{dt} + \frac{d\Psi}{dt},$$

где Φ и Ψ — тензоры одного и того же типа.

$$2. \quad \frac{d}{dt} (\lambda \Phi) = \frac{d\lambda}{dt} \Phi + \lambda \frac{d\Phi}{dt},$$

где λ — скаляр.

$$3. \quad \frac{d}{dt} (\Phi \Psi) = \frac{d\Phi}{dt} \Psi + \Phi \frac{d\Psi}{dt}$$

для тензоров произвольных валентностей.

4. Операции симметрирования, альтернирования и свертывания перестановочны с операцией дифференцирования.

Заметим, наконец, что из того же положения, связывающего производную тензора и его след, вытекает следующее правило: *при дифференцировании тензора по параметру его координаты по отношению к постоянному базису тоже дифференцируются.*

Требование постоянства базиса существенно. Если бы базис тоже зависел от параметра, то связь между координатами данного тензора и его производной была бы более сложной, чем в отмеченном случае.

§ 10. Геометрия группы преобразований

В своей Эрлангенской программе Клейн следующим образом формулирует один из наиболее плодотворных методов обобщения задачи геометрии: *«Дано многообразие и в нем группа преобразований; нужно исследовать те свойства форм, принадлежащих многообразию, которые не изменяются от преобразований группы»* (см. [6], стр. 402).

История выполнения общей программы Клейна показала, что наиболее существенные результаты были получены при исследовании таких групп, которые изоморфны подгруппам группы проективных преобразований. Вследствие этого многообразия точек исследуемых пространств обычно задаются своими отображениями на точки целого проективного пространства или его частей.

Однако это не единственная возможность задания исследуемых пространств, и мы будем систематически пользоваться в дальнейшем отображением точек рассматриваемых многообразий на образы векторного пространства.

Этот способ оказывается особенно удобным для определения и исследования аффинного пространства, обобщение понятия которого является основной темой нашего изложения.

Наметим теперь тот общий план, следуя которому мы будем определять пространства с заданной группой.

Во-первых, определим *образ точки*, т. е. совокупность тех образов векторного пространства, которые находятся во взаимно однозначном соответствии с точками рассматриваемого пространства.

Во-вторых, будем задавать *фундаментальную группу* пространства, задавая некоторую функциональную зависимость, относящую вектору x другой вектор y :

$$y = f(x),$$

и определяющую отображение рассматриваемого пространства на себя.

Эти общие соображения мы применим прежде всего для введения понятия аффинного пространства n измерений.

§ 11. Аффинное пространство

Аффинным пространством n измерений или R_n называется такое пространство, образом точки которого является произвольный вектор B_n (радиус-вектор точки R_n), а фундаментальное преобразование, определяющее аффинное отображение R_n на себя, характеризуется следующей зависимостью между радиусами-векторами отображаемых точек:

$$y = \Phi x + c, \quad (1)$$

где Φ — произвольный неособенный аффинор, а c — произвольный вектор. Легко видеть, что преобразования (1) определяют группу, которая называется *группой аффинных преобразований*.

Пара точек с радиусами-векторами x_1 и x_2 , расположенных в определенном порядке, называется *отрезком*. Отрезку соответствует *вектор этого отрезка*

$$m = x_2 - x_1. \quad (2)$$

Конечная точка отрезка вполне определяется его начальной точкой и вектором, так как $x_2 = x_1 + a$.

При преобразовании группы (1) вектор отрезка преобразуется по формуле

$$n = \Phi m, \quad (3)$$

которая показывает, что *линейная зависимость векторов, соответствующих отрезкам, сохраняется при аффинном преобразовании*. Это обстоятельство позволяет говорить о *линейной зависимости отрезков* в том случае, когда эта зависимость имеет место для векторов этих отрезков.

Репером *) n -мерного аффинного пространства является фигура, состоящая из точки и n независимых отрезков, исходящих из этой точки.

Действительно, возьмем две точки x_0, y_0 и две группы независимых отрезков $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ и будем искать такое преобразование, которое переводит x_0 в y_0 и a_i в b_i . Аффинор преобразования определится из условия

$$b_i = \Phi a_i,$$

как это было показано в § 8, а после этого мы будем иметь

$$c = y_0 - \Phi x_0.$$

Существенную часть содержания аффинной геометрии составляет учение о *линейных многообразиях* аффинного пространства. *Линейное многообразие p измерений*, или *p -плоскость*, есть место концов отрезков, исходящих из данной точки так, что их векторы образуют векторное пространство p измерений.

Согласно этому определению всякую точку p -плоскости можно представить вектором

$$x = x_0 + u^1 a_1 + u^2 a_2 + \dots + u^p a_p = x_0 + \sum_1^p u^b a_b, \quad (4)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_p$ — независимые векторы, а $u^1, u^2, \dots, u^p$ — числовые параметры. Легко видеть, что выбор начальной точки x_0 произволен. Действительно, если x_1 — любая другая точка p -плоскости, радиус-вектор которой

$$x_1 = x_0 + \sum_1^p v^b a_b,$$

то

$$x = x_1 + \sum_1^p (u^b - v^b) a_b = x_1 + \sum_1^p w^b a_b.$$

*) *Реперами* называются фигуры, переходящие друг в друга при преобразовании данной группы, причем это преобразование заданием пары реперов определяется однозначно.

Мы можем также, не меняя p -плоскости, перейти к новому базису b_k , полагая $a_k = \sum_1^p A_k^m b_m$, $k, m = 1, \dots, p$, при очевидном условии $\text{Det} \| A_k^m \| \neq 0$, и представить уравнения (4) в виде

$$x = x_0 + \sum_1^p t^k b_k.$$

Если концы x_1, x_2 отрезка принадлежат p -плоскости, то его вектор $m = x_2 - x_1$ может быть разложен по векторам базиса этой плоскости, так что

$$m = \sum_1^p m^b a_b. \quad (5)$$

Если это условие выполнено, но один из концов отрезка не принадлежит p -плоскости, то и второй конец не будет ей принадлежать. В этом случае говорят, что *отрезок m параллелен p -плоскости*.

Если даны q -плоскость и p -плоскость, причем $q \leq p$, а всякий отрезок q -плоскости параллелен p -плоскости, то говорят, что *q -плоскость параллельна p -плоскости*. Всякую q -плоскость, параллельную p -плоскости (4), можно выразить уравнением

$$y = y_0 + \sum_1^q t^k c_k,$$

где y_0 не принадлежит p -плоскости (4), а

$$c_i = B_i^k a_k, \quad i = 1, \dots, q; \quad k = 1, \dots, p.$$

Из того, что преобразование (3) сохраняет линейные зависимости (4) и (5), следует, что *при аффинном преобразовании p -плоскости переходят в p -плоскости, а параллелизм сохраняется*.

p -плоскость при $p = 1$ (1-плоскость) называется *прямой*.

Прямая выражается уравнением

$$x = x_0 + ua. \quad (6)$$

Если два отрезка, выражаемых векторами a и b , лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то их векторы находятся в линейной зависимости. Выражая отрезок

b через a следующим образом:

$$b = \lambda a,$$

получим число, которое называется *отношением* отрезка b к отрезку a . Это отношение тоже сохраняется при аффинных преобразованиях.

Если три точки x_1, x_2, x лежат на одной прямой, то отношение λ отрезков $x_2 - x$ и $x - x_1$ называется *отношением*, в котором точка x делит отрезок (x_1, x_2) . Из условия

$$x = x_1 + \lambda (x_2 - x_1)$$

мы получаем выражение радиуса-вектора точки x , делящей отрезок (x_1, x_2) в отношении λ :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \quad (7)$$

В частности, при $\lambda = 1$ точка x называется *серединой* отрезка (x_1, x_2) . Ее радиус-вектор

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (8)$$

Гиперплоскостью n -мерного аффинного пространства называется $(n - 1)$ -плоскость.

Для того чтобы точка x определялась из условия

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{n-1} u^k a_k,$$

необходимо и достаточно, чтобы векторы $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x - x_0$ находились в линейной зависимости, а это в свою очередь равносильно условию

$$e_{i_1 i_2 \dots i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_{n-1}^{i_{n-1}} (x^{i_n} - x_0^{i_n}) = 0,$$

где $e_{i_1 i_2 \dots i_n}$ — произвольный n -вектор. Называя *направляющим ковектором гиперплоскости* ковектор

$$\tau_i = e_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_{n-1}^{i_{n-1}}, \quad (9)$$

мы получим условие того, что точка x принадлежит гиперплоскости с направляющим ковектором τ , проходящей через точку x_0 . Это условие имеет вид

$$\tau(x - x_0) = 0 \quad (10)$$

и называется *уравнением гиперплоскости*. Раскрывая скобки и обозначая постоянное $-\tau x_0$ через c , мы можем записать это уравнение еще в следующем виде:

$$\tau x + c = 0, \quad (11)$$

где τ — по-прежнему направляющий ковектор, а c — свободный член уравнения.

Направляющий ковектор τ , координаты которого определяются формулами (9), по-видимому, зависит от выбора базисных векторов a_k гиперплоскости, однако эта зависимость выражается только некоторым числовым множителем. Действительно, если мы заменим один из векторов (например, a_1) линейной комбинацией

$$\check{a}_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{n-1} a_{n-1},$$

то новый направляющий ковектор

$$\check{\tau}_i = e_{i_1 \dots i_{n-1}} \check{a}_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_{n-1}^{i_{n-1}} = \lambda_1 e_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_{n-1}^{i_{n-1}} = \lambda_1 \tau_i.$$

Этот процесс повторится и при замене остальных базисных векторов.

Так как базисные векторы параллельных гиперплоскостей можно выбрать одинаковыми, то их направляющие ковекторы либо совпадают, либо отличаются числовым множителем. Вообще, если две гиперплоскости даны своими уравнениями

$$\tau_1 x + c_1 = 0, \quad \tau_2 x + c_2 = 0$$

и их направляющие векторы находятся в линейной зависимости:

$$\lambda \tau_1 + \mu \tau_2 = 0,$$

то эти гиперплоскости совпадают, если

$$\lambda c_1 + \mu c_2 = 0,$$

и параллельны между собою, если

$$\lambda c_1 + \mu c_2 \neq 0.$$

Если в R_n введен базис m_k , то всякий вектор определится своими координатами. Координаты радиуса-вектора точки x называются также *декартовыми координатами*

точки. Аффинное преобразование, переводящее точку x в точку y , выражается в декартовых координатах формулами

$$y^i = \Phi_k^i x^k + c^i \quad (12)$$

при условии $\text{Det} \parallel \Phi_k^i \parallel \neq 0$.

Параметрические уравнения p -плоскости имеют вид

$$x^i = x_0^i + \sum_1^p a_k^i u^k, \quad (13)$$

а уравнение гиперплоскости — вид

$$\tau_i x^i + c = 0. \quad (14)$$

§ 12. Центроаффинное пространство

Пространство, образом точки которого является всякий вектор B_n , отличный от нуля, а группа определяется уравнением

$$y = \Phi(x),$$

где Φ — неособенный аффинор, называется *центроаффинным*.

Так как центроаффинная группа является подгруппой группы аффинных преобразований, то все понятия аффинной геометрии могут быть сохранены и в центроаффинной. Сохраняя прежний смысл понятия отрезка, мы получим для аффинного преобразования отрезков прежний закон:

$$n = \Phi m.$$

Репером центроаффинного пространства, однако, является просто произвольный векторный базис, к которому нет необходимости присоединять точку.

Что касается p -плоскостей, то среди них нужно различать *центральные*, т. е. те, уравнения которых удовлетворяются значением $x = 0$, и *нецентральные*, т. е. все остальные. Уравнение нецентральной гиперплоскости всегда можно привести к *нормальному виду*:

$$\tau x = 1,$$

причем после этого приведения ковектор τ определится однозначно. Таким образом, в центроаффинном простран-

стве можно установить взаимно однозначное соответствие между нецентральными гиперплоскостями и коекторами того B_n , на которое отображено центроаффинное пространство.

§ 13. Эквиаффинное пространство

Среди n -векторов B_n выберем один $e_{i_1 i_2 \dots i_n}$ и будем называть его *основным*. После этого будем называть *объемом параллелотопа*, построенного на векторах некоторого базиса $x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \dots, x_n^{i_n}$, след основного n -вектора на этих векторах, т. е.

$$V = e_{i_1 i_2 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}. \quad (1)$$

Будем называть *эквиаффинным* такое пространство, образом точки которого является произвольный вектор B_n , а фундаментальной группой — такая подгруппа аффинных преобразований, которая оставляет неизменным объем всякого параллелотопа.

Запишем условие сохранения объема, пользуясь формулой (7,5):

$$V = e \operatorname{Det} \|y_j^i\| = e \operatorname{Det} \|\Phi_k^i x_j^k\| = e \operatorname{Det} \|x_j^k\| \cdot \operatorname{Det} \|\Phi_m^l\|.$$

Таким образом, эквиаффинное преобразование определяется формулой

$$y = \Phi x + c \quad (2)$$

при условии

$$I(\Phi) = \operatorname{Det} \|\Phi_j^i\| = 1. \quad (3)$$

Инвариант $I(\Phi)$ аффинора аффинного преобразования называют иногда *модулем* этого преобразования, поэтому и эквиаффинное преобразование называют также *унимодулярным*.

За репер эквиаффинной группы можно принять совокупность точки и базиса, обладающего тем свойством, что объем параллелотопа, построенного на векторах этого базиса, равен единице. Если принять этот базис за координатный, то и координаты следует назвать

эквивалентными. В эквивалентных координатах

$$e = 1 \quad (4)$$

и объем любого параллелепипеда

$$V = \text{Det} \| x_k^i \|. \quad (5)$$

§ 14. Евклидово пространство

Выберем некоторый вектор, т. е. ковариантный симметричный неособенный тензор g_{ij} .

Пользуясь им для отождествления ко- и контравариантных векторов, будем называть *скалярным произведением* двух векторов след одного из них на другом, т. е.

$$xy = g_{ij}x^iy^j, \quad (1)$$

а *нормой вектора* или его *скалярным квадратом* — след вектора на самом себе, т. е.

$$x^2 = g_{ij}x^ix^j. \quad (2)$$

Будем называть *евклидовым пространством* n измерений E_n такое пространство, образом точки которого является произвольный вектор x , а фундаментальной группой — подгруппа аффинных преобразований

$$y^i = \Phi_k^i x^k + c^i, \quad (3)$$

сохраняющих норму вектора всякого отрезка.

Условие сохранения нормы вектора, который преобразуется по формуле $b^i = \Phi_k^i a^k$, имеет вид

$$g_{ij}b^ib^j = g_{ij}\Phi_k^i\Phi_l^ja^ka^l = g_{kl}a^ka^l,$$

и вследствие того, что это равенство выполняется тождественно относительно a^i , симметричные части тензоров справа и слева должны совпадать. Но эти тензоры симметричны, так что

$$g_{ij}\Phi_k^i\Phi_l^j = g_{kl}. \quad (4)$$

Вводя тензор $\tilde{\Phi}^i_j$, обратный тензору Φ^i_j , т. е. связанный с ним условием

$$\tilde{\Phi}^i_k\Phi^k_j = \delta^i_j, \quad (5)$$

можно записать условие (4) в виде

$$\Phi_{ik} = \tilde{\Phi}_{kl}.$$

Называя подгруппу аффинных преобразований, сохраняющих норму вектора, ортогональной, мы приходим к следующему результату: для того чтобы подгруппа аффинных преобразований была ортогональной по отношению к некоторому симметричному вектору, необходимо и достаточно, чтобы аффино́р, обратный аффино́ру преобразования этой подгруппы, был ему сопряжен.

Так как инварианты сопряженных аффино́ров одинаковы, то одинаковы и инварианты взаимно обратных ортогональных преобразований, так что

$$I(\Phi) I(\tilde{\Phi}) = [I(\Phi)]^2 = 1, \quad \text{или} \quad I(\Phi) = \pm 1. \quad (6)$$

В случае $I(\Phi) = 1$ ортогональные преобразования называются *собственными* и образуют подгруппу эквиаффи́нных преобразований. В этом случае за основной n -вектор выбирают дискриминантный n -вектор тензора g_{ij} .

Длиною отрезка пространства E_n , соответствующего вектору a , называется величина

$$a = \sqrt{\sigma a^2}, \quad (7)$$

где $\sigma = \pm 1$ и имеет тот же знак, что и норма вектора a . Длина отрезка, соединяющего точки x_1 и x_2 , называется *расстоянием* между этими точками. *Сферой* называется место точек, находящихся на равных расстояниях от данной точки x_0 , которая называется *центром* этой сферы. Радиусы-векторы точек сферы удовлетворяют уравнению

$$(x - x_0)^2 = c. \quad (8)$$

Углом между двумя отрезками называется величина, определяемая уравнением

$$\cos \frac{\varphi}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2} \sqrt{b^2}}, \quad (9)$$

где c — *масштабная константа*, выбранная так, чтобы угол φ был действительным. Для векторов, нормы которых имеют одинаковый знак, масштабной константой всегда можно считать либо 1, либо i в зависимости от того, будет ли абсолютная величина правой части меньше или больше единицы.

Два отрезка называются *ортогональными*, если взаимный след их векторов равен нулю.

Углом между двумя гиперплоскостями называется угол между их направляющими векторами, определяемый по формуле

$$\cos \frac{\varphi}{c} = \frac{\tau_1 \tau_2}{\sqrt{\tau_1^2} \sqrt{\tau_2^2}}.$$

Понятие угла можно установить также и для плоскостей любого числа измерений (см., например, [15], стр. 392), но мы не будем останавливаться на этом определении в общем виде, заметив, однако, что *две плоскости любого числа измерений называются вполне ортогональными друг другу*, если всякие два отрезка, принадлежащие этим плоскостям, ортогональны между собою.

Как известно из алгебры, всякую квадратичную форму с действительными коэффициентами можно привести с помощью действительного линейного однородного неособенного преобразования к каноническому виду, т. е. к алгебраической сумме квадратов ее переменных. Производя соответствующее преобразование базиса в E_n , мы приведем основную квадратичную форму, выражающую норму вектора, к каноническому виду

$$x^2 = \sum \pm (x^i)^2. \quad (10)$$

В этом случае для вектора базиса e_i будем иметь

$$e_i e_j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \pm 1, & i = j. \end{cases}$$

Такой базис назовем *ортонормированным*. Для ортонормированного базиса E_n , следовательно, характерно то, что его векторы взаимно ортогональны, а норма каждого из них равна ± 1 .

Так как вследствие «закона инерции» число плюсов и минусов в правой части выражения (10) не изменяется при линейном преобразовании, то *ортонормированный базис вместе с точкой образует репер пространства E_n* .

Особенно простыми свойствами отличаются все введенные понятия в том случае, когда основная форма, отнесенная к ортонормированному базису, принимает вид суммы квадратов координат, т. е.

$$x^2 = \sum_{i=1}^n (x^i)^2, \quad (11)$$

иными словами, является *положительно определенной*. Норма всякого вектора будет в таком случае *положительной*. Поэтому для любых двух векторов

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2}} \pm \frac{y}{\sqrt{y^2}} \right)^2 = 2 \left(1 \pm \frac{xy}{\sqrt{x^2} \sqrt{y^2}} \right) > 0.$$

Следовательно, для любых векторов

$$-1 \leq \cos \frac{\varphi}{c} \leq 1, \quad (12)$$

и при определении углов масштабную константу c можно положить равной единице, так что для угла между любыми векторами будем иметь

$$\cos \varphi = \frac{xy}{\sqrt{x^2} \sqrt{y^2}}. \quad (13)$$

Пространство с положительно определенной нормой вектора называют иногда *собственно евклидовым*, а пространство с нормой, не обладающей этим свойством, — *псевдоевклидовым*. В псевдоевклидовых пространствах уравнение $x^2 = 0$ имеет действительные ненулевые решения, а векторы, ему удовлетворяющие, называются *векторами изотропных направлений*. Можно говорить о векторах изотропных направлений и в собственно евклидовом пространстве, но при этом нужно помнить, что эти векторы мнимы.

§ 15. Кривые и поверхности аффинного пространства

Преобразования аффинной группы и ее подгруппы принадлежат к числу *непрерывных преобразований*, так как они допускают такое определение бесконечной близости точек, которое не теряет своего смысла при любых аффинных отображениях пространства на себя.

Это определение состоит в том, что точки называются *бесконечно близкими*, если разность их радиусов-векторов, или, иначе говоря, вектор, отвечающий соединяющему эти точки отрезку, стремится к нулю.

Более того, свойство дифференцируемости функции, определяющей зависимость вектора от скаляра, тоже сохраняется при любом аффинном преобразовании

вектора, так как если

$$y = \Phi(x) + c,$$

то

$$\frac{dy}{dt} = \Phi\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Пользуясь этим свойством, вводят такие определения, которые позволяют установить основы аффинно-дифференциальной геометрии и, прежде всего, понятие кривой линии.

Кривой линией аффинного пространства называют место точек, радиус-вектор которых определяется из уравнения

$$x = x(u),$$

где u — переменный скаляр, а $x(u)$ — его дифференцируемая функция.

Соединив две точки кривой $x(u)$ и $x_1 = x(u + \Delta u)$ прямой, которую мы будем называть *секущей*, предположим, что x_1 неограниченно приближается к x . Предельное положение секущей, проходящей через две точки кривой, из которых одна неограниченно приближается к другой, называют *касательной*, а точку x — *точкой прикосновения* этой касательной и кривой.

Направляющий вектор секущей можно представить в виде

$$\frac{\Delta x}{\Delta u} = \frac{x_1 - x}{\Delta u};$$

переходя к пределу, мы получим направляющий вектор касательной:

$$t = \dot{x} = \frac{dx}{du}. \quad (1)$$

Итак, *направляющий вектор касательной равен производной от радиуса-вектора точки кривой по параметру, а уравнение касательной имеет вид*

$$y = x + vx. \quad (2)$$

Если функция $x(u)$ дифференцируема дважды, то можно говорить о *соприкасающейся плоскости* двух измере-

ний кривой, т. е. о предельном положении плоскости, проходящей через три точки кривой, из которых две неограниченно приближаются к третьей. Можно показать, что это определение равносильно следующему: соприкасающаяся плоскость проходит через точку x и содержит векторы $\dot{x}$ и $\ddot{x}$, т. е. имеет уравнение

$$y = x + v\dot{x} + w\ddot{x}. \quad (3)$$

Приняв второе определение, мы легко убедимся, что соприкасающаяся плоскость не зависит от параметризации кривой. Действительно, при изменении параметра производные заменяются по формулам

$$x' = \dot{x}u', \quad x'' = \dot{x}u'' + \ddot{x}(u')^2,$$

что приводит к такому изменению базиса, при котором он остается в той же плоскости.

Соприкасающаяся плоскость остается неопределенной во всех точках линии, если во всех ее точках векторы производных $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ находятся в линейной зависимости:

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} = 0. \quad (4)$$

Интеграл этого дифференциального уравнения имеет вид

$$x = c_1 + c_2u,$$

который показывает, что неопределенность соприкасающейся плоскости характеризует прямую.

Обобщив приведенные рассуждения, мы можем ввести понятие соприкасающейся p -плоскости, заданной уравнением

$$y = x + \sum_1^p u_i x^{(i)}, \quad (5)$$

где

$$x^{(i)} = \frac{d^i x}{dt^i}.$$

Неопределенность соприкасающейся p -плоскости показывает, что кривая всеми своими точками принадлежит некоторой q -мерной плоскости, где $q < p$.

Поверхностью p измерений, или X_p , называется место точек, радиус-вектор x которых удовлетворяет уравнению

$$x = x(u^1, u^2, \dots, u^p), \quad (6)$$

где $u^1, u^2, \dots, u^p$ — независимые переменные, а x — функция, дифференцируемая по всем этим переменным.

Чтобы получить условие независимости параметров u^i , рассмотрим якобиеву матрицу

$$\| \partial_i x^\alpha \| = \left\| \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \right\|, \quad \alpha = 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, p. \quad (7)$$

Для того чтобы u^i были независимы между собой, необходимо и достаточно, чтобы ранг этой матрицы был равен p . Действительно, если он равен $p - k$, а координаты перенумерованы так, что ранговый определитель

$$\text{Det} \| \partial_a x^\alpha \| \neq 0, \quad a, \alpha = 1, \dots, p - k,$$

то всякая u^i при $i > p - k$ зависит от $p - k$ первых декартовых координат, т. е. число существенных параметров меньше p . Обратно, если

$$\delta = \text{Det} \| \partial_i x^\alpha \| \neq 0 \quad *), \quad i, \alpha = 1, \dots, p,$$

то все x^α независимы, а все u^i можно выразить через x^α , $\alpha = 1, \dots, p$, и

$$\text{Det} \left\| \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \right\| = \delta^{-1} \neq 0,$$

следовательно, u^i независимы.

В векторном виде условие полноты ранга якобиевой матрицы (7) равносильно независимости векторов

$$\partial_i x = \frac{\partial x}{\partial u^i}, \quad (8)$$

которые называют *координатными векторами поверхности*.

Если линия принадлежит X_p , то она может быть задана *внутренним уравнением*

$$u^i = u^i(t),$$

где u^i — параметры X_p . Касательный вектор этой линии

$$\dot{x} = \partial_i x \cdot \dot{u}^i \quad (9)$$

*) Мы исключаем из рассмотрения «особые точки» X_p , в которых это условие нарушается.

выражается линейно через координатные векторы X_p . Сами векторы $\partial_i x$ являются касательными векторами *координатных линий*, т. е. таких линий, вдоль которых изменяется только одна координата.

Говоря, что *прямая касается поверхности*, если она касается некоторой кривой, принадлежащей этой поверхности, мы приходим к следующему результату: *всякая прямая, касающаяся X_p в данной ее точке, принадлежит p -плоскости, определяемой этой точкой и p координатными векторами поверхности в этой точке*. Эта p -плоскость называется *касательной p -плоскостью X_p* , и мы будем обозначать ее через T_p . В случае *гиперповерхности*, т. е. поверхности X_{n-1} , касательная гиперплоскость определяется уравнением

$$\mathbf{v}(y - x) = 0, \quad (10)$$

где $\mathbf{v}$ — ковектор, определяемый из условий

$$\mathbf{v} \partial_i x = 0, \quad (11)$$

а x — точка прикосновения гиперплоскости к X_{n-1} .

Линия гиперповерхности называется *асимптотической*, если ее соприкасающаяся плоскость принадлежит T_{n-1} . Условием этого, очевидно, будет равенство $\ddot{x}\mathbf{v} = 0$, или $d^2x \cdot \mathbf{v} = 0$, или так как

$$dx \cdot \mathbf{v} = 0, \quad d^2x \cdot \mathbf{v} + dx \cdot d\mathbf{v} = 0,$$

то

$$dx \cdot d\mathbf{v} = 0.$$

Таким образом, *асимптотические линии являются интегральными кривыми уравнения*

$$b_{ij} du^i du^j = 0, \quad (12)$$

где

$$b_{ij} = b_{ji} = -\partial_i x \partial_j \mathbf{v}. \quad (13)$$

В заключение рассмотрим простейшие понятия дифференциальной геометрии E_n .

Длиной дуги кривой $x = x(u)$ в E_n называется интеграл

$$s = \int_0^t \sqrt{|\dot{x}^2|} du, \quad (14)$$

который, очевидно, не зависит от параметризации. Если принять длину дуги за параметр и обозначить $\frac{dx}{ds} = x'$, то мы получим

$$|x'|^2 = 1,$$

так что норма касательного вектора, соответствующего параметру, равному длине дуги, будет равна единице.

Дифференцируя еще раз по s , будем иметь

$$x'x'' = 0;$$

следовательно, вектор второй производной по дуге ортогонален касательной.

Кривизной кривой называется величина

$$k = \sqrt{|x''|^2}.$$

Если кривизна равна нулю во всех точках линии, а вектор x'' неизотропен, то $x'' = 0$, откуда следует, что линия прямая.

§ 16. Криволинейные координаты в R_n

Если радиус-вектор пространства R_n задан как дифференцируемая функция n независимых переменных:

$$x = x(u^1, u^2, \dots, u^n),$$

то эти переменные называются *криволинейными координатами*. Так как условие независимости u^i имеет вид

$$\text{Det} \|\partial_i x^\alpha\| \neq 0, \quad i, \alpha = 1, \dots, n, \quad (1)$$

то координатные векторы

$$x_i = \partial_i x \quad (2)$$

образуют в каждой неособой точке параметризации базис, который называется *местным базисом* (или *естественным подвижным репером*) данной системы криволинейных координат.

Дифференцируя координатные векторы и разлагая их производные по ним самим, мы получим дифференциальные уравнения

$$\partial_j x_i = \Gamma_{ji}^k x_k, \quad (3)$$

или *деривационные уравнения* параметризации. Коэффициенты Γ_{ji}^k симметричны относительно своих нижних индексов и называются *коэффициентами связности* пространства R_n .

Коэффициенты связности не являются координатами тензора. Действительно, если координаты u^i совпадают с декартовыми, то дифференцирование разложения

$$x = e_k u^k$$

даст

$$\partial_i x = e_i,$$

и местный базис будет одним и тем же во всех точках пространства. Итак, величины Γ_{ji}^k могут обратиться в нуль вследствие преобразования координат, будучи отличными от нуля до этого преобразования, что невозможно для координат тензора.

Задание коэффициентов связности позволяет получить основные соотношения аффинной геометрии пространства, отнесенного к криволинейным координатам.

Покажем это на двух примерах. Предположим, что в каждой точке кривой

$$x = x(t) \quad (4)$$

задан некоторый вектор, значение которого зависит от положения этой точки, так что

$$a = a(t).$$

Разложим этот вектор по местному базису точки, т. е. представим его в виде

$$a = a^k x_k.$$

Дифференцируя по t и принимая во внимание формулы (3), получим

$$\frac{da}{dt} = \left(\frac{da^k}{dt} + \Gamma_{mn}^k a^m \frac{du^n}{dt} \right) x_k. \quad (5)$$

Условие того, что вектор a остается неизменным вдоль кривой, или, как мы будем говорить в дальнейшем, *условие параллельного переноса вектора a вдоль этой кривой* имеет вид

$$\frac{da^k}{dt} + \Gamma_{mn}^k a^m \frac{du^n}{dt} = 0. \quad (6)$$

В качестве второго примера выведем дифференциальное уравнение прямой в пространстве, отнесенном к криволинейным координатам. Согласно (15,4) оно должно иметь вид

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \lambda \dot{x},$$

или

$$\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \Gamma_{mn}^k \frac{du^m}{dt} \frac{du^n}{dt} = \lambda \frac{du^k}{dt}. \quad (7)$$

Если пространство E_n отнесено к криволинейным координатам, то, согласно (15,14), элемент дуги всякой кривой записывается следующим образом:

$$ds^2 = x_i x_j du^i du^j = \gamma_{ij} du^i du^j. \quad (8)$$

Так как ds^2 не зависит от выбора системы координат, то γ_{ij} есть тензор, который называется *основным* или *метрическим тензором* пространства.

Используя уравнения (3), мы получим, что компоненты метрического тензора должны удовлетворять уравнению

$$\partial_k \gamma_{ij} = \Gamma_{ki}^s \gamma_{sj} + \Gamma_{kj}^s \gamma_{is}. \quad (9)$$

ГЛАВА II

ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

§ 17. Проективное пространство

В ряде вопросов геометрического характера приходится рассматривать также величины, которые заданы с точностью до числового множителя. К ним, например, принадлежит направляющий ко вектор τ в уравнении гиперплоскости

$$\tau(x - x_0) = 0.$$

Величины, заданные таким образом, называют *псевдовеличинами*. Точнее говоря, *псевдовеличиной* называют совокупность величин, отличающихся друг от друга числовым множителем, не равным нулю. Про всякое определенное значение величины, принадлежащей этой совокупности, говорят, что она *представляет* данную псевдовеличину. Выбор представителя псевдовеличины называют *нормированием* этой величины. Так, в примере, приведенном выше, ковариантный псевдовектор центроаффинного пространства можно пронормировать так, чтобы уравнение гиперплоскости, не проходящей через центр, имело вид

$$\tau x = 1.$$

Если какие-либо представители псевдовеличин находятся в линейной зависимости

$$\lambda\phi + \mu\psi + \dots + \nu\chi = 0,$$

то и всякие другие их представители находятся в линейной зависимости, хотя и с другими коэффициентами; поэтому в данном случае можно говорить о линейной зависимости самих псевдовеличин.

После этих предварительных замечаний перейдем к формулировке определения понятия *проективного пространства*.

Пространство, образом точки которого является псевдовектор $x \in B_{n+1}$, отличный от нуля, а фундаментальная группа определена зависимостью

$$y = \Phi x, \quad (1)$$

где x и y — представители псевдовекторов соответствующих точек, а Φ — неособенный псевдоаффинор, называется проективным пространством n измерений или P_n .

Линейная зависимость псевдовекторов сохраняется при преобразовании (1), вследствие чего можно говорить о линейной зависимости точек P_n при условии линейной зависимости векторов, представляющих эти точки.

Проективным репером называется совокупность $n + 1$ точек пространства, причем первые $n + 1$ точек независимы между собою и называются вершинами репера, а последняя — единичная точка — подчинена условию линейной независимости со всякими n вершинами. Легко видеть, что задание двух реперов, переходящих друг в друга при проективном преобразовании, определяет это преобразование.

Если даны $m + 1$ независимых точек

$$a_1, a_2, \dots, a_{m+1}, \quad m < n,$$

то совокупность всех точек, находящихся в линейной зависимости с данными, называется m -плоскостью или плоскостью m измерений пространства P_n . Уравнение m -плоскости имеет вид

$$x = \sum_1^{m+1} a_k u^k. \quad (2)$$

Заменяя базисные точки a_k их линейными комбинациями или полагая

$$a_k = A_k^r b_r, \quad k, r = 1, \dots, m + 1,$$

где

$$\text{Det} \| A_k^r \| \neq 0,$$

мы получим ту же m -плоскость, но в иной параметризации.

Плоскость одного измерения называется прямой. Ее уравнение имеет вид

$$x = \lambda a_1 + \mu a_2, \quad (3)$$

где a_1 и a_2 — различные точки.

Предположим, что на прямой (3) заданы две точки:

$$b_1 = \lambda_1 a_1 + \mu_1 a_2, \quad b_2 = \lambda_2 a_1 + \mu_2 a_2. \quad (4)$$

Введем обозначение

$$(a_1 a_2 b_1 b_2) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2} \quad (5)$$

и будем называть это отношение *ангармоническим отношением четырех точек*, лежащих на одной прямой *).

Изменяя нормирование векторов, мы изменим величины λ_i , μ_i , но, как легко видеть из (5), ангармоническое отношение остается неизменным. Оно не изменится и при преобразовании (1) и, следовательно, является инвариантом проективной группы.

Ангармоническое отношение зависит от порядка, в котором рассматриваются точки. Нетрудно убедиться в том, что ангармоническое отношение меняет свою величину на обратную при перестановке точек первой или второй пары:

$$(a_1 a_2 b_1 b_2) = (a_2 a_1 b_1 b_2)^{-1} = (a_1 a_2 b_2 b_1)^{-1}. \quad (6)$$

Разрешая уравнения (4), получим

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) a_1 &= \mu_2 b_1 - \mu_1 b_2, \\ (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) a_2 &= -\lambda_2 b_1 + \lambda_1 b_2, \end{aligned}$$

откуда следует:

$$(b_1 b_2 a_1 a_2) = \frac{\mu_1}{\mu_2} : \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2},$$

так что ангармоническое отношение не меняется при перестановке первой пары точек со второй:

$$(a_1 a_2 b_1 b_2) = (b_1 b_2 a_1 a_2). \quad (7)$$

Если три точки, расположенные на прямой, известны, то четвертая определяется по величине ангармонического отношения при условии, что указано ее порядковое место в четверке.

Действительно, пусть, например, ищется точка x из условия

$$(a_1 a_2 b x) = m;$$

*) В дальнейшем, говоря об ангармоническом отношении четырех точек, мы будем тем самым предполагать, что эти точки лежат на одной прямой.

полагая

$$b = \lambda a_1 + \mu a_2,$$

получим

$$x = m\lambda a_1 + \mu a_2.$$

Точки образуют *гармоническую четверку*, если их ангармоническое отношение равно -1 .

По предыдущему

$$(a_1 a_2 b_1 b_2) = -1$$

при

$$\begin{cases} b_1 = \lambda a_1 + \mu a_2, \\ b_2 = \sigma \lambda a_1 - \sigma \mu a_2. \end{cases} \quad (8)$$

Условие, что точка $x \subset P_n$ принадлежит *гиперплоскости*, т. е. P_{n-1} , состоит в линейной зависимости вектора x и векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$, соответствующих n независимым точкам P_{n-1} . Согласно § 7 этому условию можно придать вид

$$e_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha} a^{\alpha_1} a^{\alpha_2} \dots a^{\alpha_n} x^\alpha = 0,$$

где $e_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha}$ есть $(n+1)$ -вектор.

Вводя *ковектор гиперплоскости*

$$\xi_\alpha = e_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha} a^{\alpha_1} a^{\alpha_2} \dots a^{\alpha_n},$$

который определяется с точностью до множителя, т. е. является псевдовеличиной, мы получим уравнение

$$\xi_\alpha x^\alpha = 0. \quad (9)$$

Итак, *уравнение гиперплоскости* выражается равенством нулю следа ковектора этой гиперплоскости на векторе, представляющем ее точку. Условие это называют также *условием инцидентности* гиперплоскости ξ_α и точки x^α .

Общие точки гиперплоскости P_{n-1} и плоскости P_m можно определить, подставляя вектор точки P_m

$$x = \sum_{k=1}^{m+1} u^k a_k$$

в уравнение гиперплоскости

$$\xi x = 0.$$

Если P_m не принадлежит P_{n-1} всеми своими точками, то хотя бы один из коэффициентов ξa_k в уравнении

$$\sum_1^{m+1} (\xi a_k) u^k = 0$$

не равен нулю. Предположив для определенности, что

$$\xi a_{m+1} \neq 0,$$

мы получим

$$u^{m+1} = - \frac{\sum_1^m (\xi a_k) u^k}{\xi a_{m+1}} = \sum_1^m \lambda_k u^k,$$

и вектор искомой точки представится так:

$$x = \sum_1^m u^k (a_k + \lambda_k a_{m+1}) = \sum_1^m u^k b_k.$$

Но так как векторы $a_1, \dots, a_m, a_{m+1}$ независимы, то векторы b_k тоже независимы, и мы приходим к следующему результату: *если P_m не принадлежит P_{n-1} , то они пересекаются по некоторой P_{m-1} . В частности, прямая, не принадлежащая гиперплоскости, пересекает ее в одной точке.*

§ 18. Пространство гиперплоскостей

Мы видели, что гиперплоскости проективного пространства отображаются на ковекторы. При проективном преобразовании (17,1) гиперплоскость, очевидно, переходит в гиперплоскость. Выясним, как при этом преобразуется ее ковектор. Если после преобразования уравнение гиперплоскости имеет вид

$$\eta_\alpha y^\alpha = 0,$$

то вектор x точек непреобразованной гиперплоскости удовлетворяет уравнению

$$\eta_\alpha \Phi_\beta^\alpha x^\beta = 0,$$

и, значит, ковектор этой гиперплоскости

$$\xi_\beta = \Phi_\beta^\alpha \eta_\alpha,$$

или

$$\eta_\alpha = \tilde{\Phi}_\alpha^\beta \xi_\beta, \tag{1}$$

где $\tilde{\Phi}$ — аффино́р, обратный аффино́ру Φ .

Итак, гиперплоскости пространства P_n отображаются на ковариантные псевдовекторы B_{n+1} , и эти ковекторы преобразуются при помощи (17,1) по формуле (1). Этот результат может быть истолкован следующим образом: гиперплоскости проективного пространства P_n образуют проективное пространство Π_n .

Возможность такой точки зрения и обуславливает существование так называемого принципа двойственности проективной геометрии, согласно которому всякой общей теореме, касающейся проективно-инвариантных свойств точек, отвечает теорема, характеризующая аналогичные свойства гиперплоскостей.

Так же как и в случае точек, будем говорить о линейной зависимости гиперплоскостей, если эта зависимость имеет место для соответствующих им ковариантных псевдовекторов.

Образ, двойственный m -плоскости, т. е. совокупность гиперплоскостей, находящихся в линейной зависимости с $m + 1$ данными независимыми гиперплоскостями $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{m+1}$, мы будем называть связкой m измерений или Π_m . Всякая гиперплоскость ξ , принадлежащая Π_m , выражается уравнением

$$\xi = \sum_1^{m+1} u_k \xi^k. \quad (2)$$

Из соотношения

$$\xi x = \sum u_k \xi^k x = 0$$

следует, что всякая точка, инцидентная $m + 1$ независимым гиперплоскостям связки, инцидентна всякой гиперплоскости этой связки. Совокупность таких точек можно назвать характеристическим многообразием связки. Выясним, что представляет собою это многообразие.

Предварительно докажем следующую теорему: если гиперплоскость ξ содержит характеристическое многообразие связки, то она принадлежит связке.

Для доказательства рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \xi_\alpha^k x^\alpha &= 0, & \xi_\alpha x^\alpha &= 0, \\ k &= 1, \dots, m+1; & \alpha &= 1, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Если точка принадлежит характеристическому многообразию связки, то ее вектор x удовлетворяет первым k

уравнениям. Предполагая, что всякая такая точка x принадлежит гиперплоскости ξ , мы должны допустить, что последнее уравнение является следствием k первых, а это возможно только при условии

$$\xi_\alpha = \sum_1^{m+1} \lambda_s \xi_s^\alpha,$$

т. е.

$$\xi = \sum_1^{m+1} \lambda_s \xi^s,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь $m + 1$ независимых гиперплоскостей связки. Первые две ξ^1 и ξ^2 различны и, значит, вследствие § 17, пересекаются по P_{n-2} . Эта P_{n-2} является характеристическим многообразием связки Π_1 , определяемой ξ^1 и ξ^2 , и не принадлежит ξ^3 , так как в противном случае ξ^3 принадлежала бы той же связке и находилась бы в линейной зависимости с ξ^1 и ξ^2 . Так как P_{n-2} не принадлежит ξ^3 , то они пересекаются по P_{n-3} , которая не принадлежит ξ^4 . Рассуждая таким образом и далее, мы приходим к следующему результату: *«характеристическое многообразие Π_m есть некоторая P_{n-m-1} . В частности, связка $n - 1$ измерения представляет собою совокупность гиперплоскостей, проходящих через одну точку»*.

Связка одного измерения называется *пучком*. Для четырех гиперплоскостей одного пучка ангармоническое отношение определяется так же, как и для четырех точек одной прямой. Так, если

$$\beta_1 = l_1 \alpha_1 + m_1 \alpha_2, \quad \beta_2 = l_2 \alpha_1 + m_2 \alpha_2, \quad (3)$$

то их ангармоническое отношение равно

$$(\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2) = \frac{m_1}{l_1} : \frac{m_2}{l_2}; \quad (4)$$

вследствие принципа двойственности оно обладает теми же свойствами, что и ангармоническое отношение точек.

Если четыре гиперплоскости пучка инцидентны четырём точкам прямой, то говорят, что эти гиперплоскости и эти точки *перспективны*. Докажем, что *ангармонические отношения перспективных четверок равны*. Для этого воспользуемся тем, что ангармоническое отношение не

зависит от нормирования, и представим зависимость между точками и гиперплоскостями в виде

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + a_2, & \beta_1 &= \alpha_1 + \alpha_2, \\ b_2 &= sa_1 + a_2, & \beta_2 &= \sigma\alpha_1 + \alpha_2. \end{aligned}$$

В таком случае

$$(a_1 a_2 b_1 b_2) = s, \quad (\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2) = \sigma,$$

но вследствие предположенной перспективности

$$\alpha_1 a_1 = \alpha_2 a_2 = \beta_1 b_1 = \beta_2 b_2 = 0,$$

$$\beta_2 b_2 = (\sigma\alpha_1 + \alpha_2)(sa_1 + a_2) = \sigma(\alpha_1 a_2) + s(\alpha_2 a_1) = 0$$

и

$$\beta_1 b_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)(a_1 + a_2) = (\alpha_1 a_2) + (\alpha_2 a_1) = 0,$$

и так как $(\alpha_1 a_2) = -(\alpha_2 a_1)$, то $\sigma = s$, что и требовалось доказать.

§ 19. Коррелятивное соответствие

Соответствие между точками и гиперплоскостями проективного пространства называется *коррелятивным*, если ковектор гиперплоскости ξ_α , соответствующей точке, связан с вектором этой точки x^β соотношением

$$\xi_\alpha = a_{\alpha\beta} x^\beta, \quad (1)$$

где $a_{\alpha\beta}$ — псевдотензор.

Из вида соотношения (1) следует, что векторам, находящимся в линейной зависимости, отвечают ковекторы, находящиеся в той же линейной зависимости. В терминах проективной геометрии этот результат приводит к следующему: *если точки принадлежат m -плоскости, то гиперплоскости, соответствующие им коррелятивно, принадлежат m -связке.*

Свойства корреляции существенно зависят от ранга ρ матрицы

$$\|a_{\alpha\beta}\| \quad (2)$$

тензора преобразования, или *ранга корреляции*. Если $\rho = n + 1$, то преобразование обратимо, уравнения (1) могут быть разрешены относительно x^β , т. е. представлены

в виде

$$x^\beta = a^{\beta\alpha} \xi_\alpha, \quad (3)$$

где $a^{\beta\alpha}$ — тензор, обратный тензору $a_{\alpha\beta}$, т. е. связанный с ним условиями

$$a^{\beta\alpha} a_{\alpha\gamma} = \delta_\gamma^\beta. \quad (4)$$

Соотношения (3) определяют корреляцию второго рода, обратную корреляции первого рода (1).

В случае обратимой корреляции линейная зависимость точек необходима и достаточна для линейной зависимости соответствующих им гиперплоскостей. Иными словами, для того чтобы точки принадлежали m -плоскости, необходимо и достаточно, чтобы гиперплоскости, соответствующие им в обратной корреляции, принадлежали m -связке.

Если ранг матрицы (2) $\rho < n + 1$, то корреляция называется необратимой или специальной. В этом случае существуют особые точки корреляции, т. е. такие точки, для которых имеют место равенства

$$a_{\alpha\beta} x^\beta = 0, \quad (5)$$

показывающие, что гиперплоскость, соответствующая особой точке, остается неопределенной. Разность $\delta = n + 1 - \rho$ называется дефектом корреляции.

Если ранг $\rho = n + 1 - k$, то существует k независимых особых точек, причем всякая точка, связанная с ними линейной зависимостью, будет тоже особой. Итак, если дефект корреляции равен k , то существует плоскость $k - 1$ измерения, которая является местом особых точек.

Необратимую корреляцию можно охарактеризовать еще иным образом. Если ее дефект равен k , то существует k независимых точек, удовлетворяющих уравнениям

$$x_a^\alpha a_{\alpha\beta} = 0, \quad a = 1, 2, \dots, k,$$

но в таком случае для гиперплоскости, соответствующей любой неособой точке пространства,

$$x_a^\alpha \xi_\alpha = 0,$$

и, следовательно, все эти гиперплоскости содержат k независимых точек, т. е. имеют общую плоскость $k - 1$ измерения (мы будем называть ее *характеристическим многообразием корреляции*), т. е. принадлежат связке $\rho - 1$

измерения. Итак, *гиперплоскости, соответствующие всем неособым точкам, принадлежат связке $\Pi_{\rho-1}$, где ρ — ранг корреляции*. Легко видеть, что характеристическое многообразие этой связки совпадает с местом особых точек, если тензор $a_{\alpha\beta}$ симметричен или кососимметричен.

Все приведенные рассуждения без труда распространяются по принципу двойственности на корреляции второго рода. Необратимые корреляции с матрицей $\|a^{\alpha\beta}\|$ ранга $\rho = n + 1 - k$ допускают существование связки Π_{k-1} особых гиперплоскостей, а точки, соответствующие всем неособым гиперплоскостям, лежат в плоскости $P_{\rho-1}$.

Корреляция называется *поляритетом*, если тензор $a_{\alpha\beta}$ симметричен. Гиперплоскость ξ_β , соответствующая точке x^α , называется в этом случае *полярной* этой точки, а сама точка x^α называется *полюсом* гиперплоскости ξ_β . Точка x^α *сопряжена* точке y^β по отношению к поляритету, если она лежит на поляре точки x^α . Вследствие симметрии условия сопряженности

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta = 0 \quad (6)$$

имеет место следующий результат: *если точка y лежит на поляре точки x , то точка x лежит на поляре точки y* . Иными словами, *полярная сопряженность точек взаимна*.

Согласно (5) особую точку следует считать сопряженной со всякой другой точкой пространства.

Рассмотрим некоторую P_m :

$$x = u^k a_k, \quad k = 1, \dots, m + 1,$$

и запишем соотношение между параметрами u^i и v^i двух точек x и y , принадлежащих этой P_m и сопряженных в поляритете $a_{\alpha\beta}$:

$$a_{\alpha\beta}a_i^\alpha a_j^\beta u^i v^j = 0.$$

Полагая

$$a_{\alpha\beta}a_i^\alpha a_j^\beta = a_{ij} = a_{ji}$$

и принимая во внимание, что u^i и v^i являются однородными координатами точек в P_m , мы видим, что поляритет $a_{\alpha\beta}$, заданный в пространстве, индуцирует поляритет на всякой m -плоскости P_m этого пространства.

Поляры точек, принадлежащих плоскости P_m , образуют пучок Π_m с характеристическим многообразием P_{n-m-1} .

Каждая точка данной P_m и каждая точка характеристической P_{n-m-1} полярного пучка Π_m будут сопряжены между собою. Поэтому плоскости P_m и P_{n-m-1} называются *взаимными полярами*.

Назовем *местом инцидентности* поляритета место точек, которые принадлежат своим полярам и включают в себя также и особые точки поляритета. Согласно этому определению уравнение места инцидентности данного поляритета имеет вид

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0. \quad (7)$$

Проективный репер называется *автополярным* относительно данного поляритета, если всякие две его вершины полярно сопряжены между собою.

Для построения автополярного репера мы берем за его первую вершину любую точку A_1 , не являющуюся точкой инцидентности, а за его противолежащую грань — поляр P_{n-1} этой точки, которая, очевидно, не проходит через точку A_1 . Вторую точку берем в этой грани произвольно, но так, чтобы она снова не была точкой инцидентности (если это возможно). Подчиняя выбор следующих вершин тому же условию, мы берем каждую следующую вершину так, чтобы она принадлежала полярам всех предыдущих вершин. Полученные вершины будут независимы, так как в противном случае поляр последней вершины A_k , проходя через все предыдущие точки, содержала бы и A_k , которая оказалась бы в таком случае принадлежащей месту инцидентности. Указанное построение мы можем продолжать до тех пор, пока плоскость P_{n-k} , по которой пересекаются поляры всех предыдущих k вершин, не будет состоять вся из точек инцидентности. Допустим теперь, что это положение наступило после построения вершины с номером k , и пусть P_{n-k} состоит из точек инцидентности. Возьмем две из них: x^α и y^α , и пусть $z^\alpha = \lambda x^\alpha + \mu y^\alpha$. В таком случае

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta}z^\alpha z^\beta &= \lambda^2 a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2\lambda\mu a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta + \mu^2 a_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta = \\ &= 2\lambda\mu a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta = 0; \end{aligned}$$

следовательно, все точки P_{n-k} сопряжены между собою. Если выбрать теперь произвольно $n - k + 1$ независимых точек этой P_{n-k} за остальные вершины репера, то

условие автополярности будет выполнено для всех $n + 1$ его вершин.

Заметим, что рассмотренная P_{n-k} , состоящая из точек инцидентности, полярных всем остальным k вершинам автополярного репера, должна совпадать с местом особых точек, так как каждая из них сопряжена полярно всем вершинам этого репера, а значит, и всякой точке пространства.

Принимая автополярный репер за координатный, мы получим, что в этом случае $a_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, так что матрица поляритета приводится к диагональному виду. Кроме того, для особых вершин $a_{\alpha\alpha} = 0$, и, следовательно, квадратичная форма, соответствующая тензору поляритета, приводится к каноническому виду

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = \sum_{\gamma=1}^{n+1-\delta} \varepsilon_\gamma (x^\gamma)^2,$$

где δ есть дефект корреляции, $\varepsilon_\gamma = \pm 1$.

Место инцидентности поляритета, т. е. геометрическое место точек, удовлетворяющее уравнению (7), называется *гиперповерхностью* (короче — просто *поверхностью*) *второго порядка* или *поверхностью* Q_{n-1} . Всякой поверхности второго порядка соответствует поляритет, однако обратное предложение несправедливо без особых соглашений. Действительно, предположим, что квадратичная форма $a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$ положительно определенная, т. е. приводится с помощью преобразования координат к виду

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = \sum_1^{n+1} (x^\gamma)^2.$$

В этом случае уравнение (7) имеет только нулевое решение и не существует таких точек, координаты которых ему удовлетворяют. Однако в целях единства терминологии мы будем говорить в дальнейшем, что уравнение (7) всегда определяет действительную или мнимую поверхность второго порядка, помня при этом, что под мнимой поверхностью второго порядка подразумевается некоторый поляритет, не имеющий места инцидентности.

Имея в виду это соглашение, а также принимая во внимание доказанный выше результат, согласно которому поляритет в пространстве индуцирует поляритет во вся-

кой P_m , мы можем сказать, что *поверхность второго порядка Q_{n-1} пересекает всякую m -плоскость по $(m-1)$ -мерной поверхности второго порядка Q_{m-1} .*

Если ранг поляритета $\rho < n+1$, то существует особая точка, которая называется также особой точкой, соответствующей Q_{n-1} . Если x_0 — особая точка, а y — другая точка поверхности, то всякая точка прямой

$$z = \lambda x_0 + \mu y$$

удовлетворяет уравнению

$$a_{\alpha\beta} z^\alpha z^\beta = 0.$$

Таким образом, вся прямая принадлежит поверхности и называется ее *прямолинейной образующей*. Назовем *вырожденной* поверхность Q_{n-1} , имеющую особую точку; мы видим, что *вырожденная Q_{n-1} представляет собою геометрическое место прямых, проходящих через особую точку*. Это место может быть вполне охарактеризовано, если взять поверхность Q_{n-2} , расположенную в некоторой гиперплоскости, не содержащей рассматриваемой особой точки x_0 . Соединяя прямой эту точку с точками Q_{n-2} , мы и получим вырожденную Q_{n-1} .

Поляра точки, принадлежащей Q_{n-1} , называется *касательной гиперплоскостью*, а полюс этой гиперплоскости — *точкой прикосновения*.

Рассмотрим Q_{n-2} , по которой касательная T_{n-1} пересекается с Q_{n-1} . Так как T_{n-1} есть поляра точки прикосновения x , то поляра P_{n-2} этой точки в T_{n-1} относительно рассматриваемой Q_{n-2} неопределенна, и, таким образом, *точка прикосновения есть особая точка поверхности Q_{n-2} , по которой касательная T_{n-1} пересекает Q_{n-1} .*

Очевидно, что T_{n-1} , а следовательно, и Q_{n-2} содержат все особые точки Q_{n-1} .

Если точка прикосновения x есть неособая точка Q_{n-1} , то Q_{n-2} содержит, кроме особых точек Q_{n-1} , еще особую для нее точку прикосновения, независимую от особых точек Q_{n-1} . Таким образом, *дефект Q_{n-2} , по которой Q_{n-1} пересекает T_{n-1} , касающуюся ее в неособой точке, на единицу выше дефекта Q_{n-1} .*

Все эти результаты могут быть без труда приложены к поляритетам второго рода, двойственным уже рассмотренным поляритетам первого рода. Термины «полюс» и

«полюса» сохраняются для точки и гиперплоскости, связанных соотношениями

$$x^\alpha = a^{\alpha\beta} \xi_\beta,$$

характеризующими поляритет второго рода, если

$$a^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha}.$$

Совокупность гиперплоскостей, инцидентных своим полюсам, называется *связкой*, или *поверхностью второго класса*, или Σ_{n-1} . Если поляритет обратим, т. е. ранг его матрицы $\rho = n + 1$, то соответствующая Σ_{n-1} сводится к совокупности гиперплоскостей, касающихся поверхности Q_{n-1} , соответствующей поляритету первого рода, обратному данному.

Перейдем к рассмотрению поляритета второго рода дефекта k или ранга $\rho = n + 1 - k$. Предположим, что координатная гиперплоскость $x^{n+1} = 0$ является особой, т. е. удовлетворяет уравнению

$$a^{\alpha\beta} \xi_\beta = 0;$$

в таком случае

$$a^{\alpha, n+1} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n + 1.$$

Если дефект равен k , то существует k независимых особых гиперплоскостей, и, выбрав их за координатные, мы будем иметь

$$a^{\alpha\sigma} = 0,$$

$$\alpha = 1, \dots, n + 1; \quad \sigma = \rho + 1, \dots, n + 1,$$

а матрица поляритета примет вид

$$\left\| \begin{array}{cccccc} a^{11} & \dots & a^{1\rho} & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ a^{\rho 1} & \dots & a^{\rho\rho} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|,$$

где

$$\text{Det} \| a^{ij} \| \neq 0, \quad i, j = 1, \dots, \rho.$$

Условие сопряженности двух гиперплоскостей

$$a^{ij}\xi_i\eta_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, \rho,$$

будет равносильно заданию невырождающегося поляритета в плоскости $P_{\rho-1}$, заданной уравнениями

$$x^{\rho+1} = x^{\rho+2} = \dots = x^{n+1} = 0$$

и являющейся характеристическим многообразием связки особых гиперплоскостей поляритета.

Итак, для построения поляритета второго рода ранга ρ нужно задать невырожденную поверхность $Q_{\rho-2}$, найти ту $P_{\rho-2}$, по которой гиперплоскость ξ пересекает $P_{\rho-1}$, содержащую $Q_{\rho-2}$, и взять полюс x найденной $P_{\rho-2}$ относительно $Q_{\rho-2}$. Точка x и будет полюсом ξ в данном поляритете. Считая, кроме того, что гиперплоскость касается Q_m , если она содержит P_m , касающуюся этой Q_m , можно дать следующее простое определение: *связка второго класса есть совокупность гиперплоскостей, касающихся невырождающейся поверхности $Q_{\rho-2}$, где ρ — ранг поляритета, соответствующего данной связке.*

§ 20. Проективная геометрия на прямой

Перейдем теперь к рассмотрению проективной прямой, т. е. проективного пространства одного измерения. Согласно общей теории точки прямой отображаются однозначно на псевдовекторы B_2 . В этом B_2 мы введем косо-симметричный вертор ε_{ij} , причем заметим, что выбор его существенной компоненты ε безразличен, так как в проективной геометрии приходится иметь дело только с псевдовеличинами. В этом случае условие совпадения двух точек прямой имеет вид

$$x^k y_k = 0, \quad (1)$$

так что условие проективного соответствия

$$y^i = \Phi_k^i x^k \quad (2)$$

равносильно следующему:

$$y^k y_k = \Phi_{ik}^{\cdot} x^k y^i = 0, \quad (3)$$

где $\Phi_{ik}^{\cdot}$ — ковариантные координаты тензора проективного преобразования.

Как мы видели в предыдущем параграфе, соответствие, определенное условием (3), обладает взаимностью, т. е. относит точке x точку y , а точке y — снова точку x тогда и только тогда, когда тензор Φ_{ij} обладает прямой или косой симметрией. Случай косой симметрии, очевидно, сводится к тождественному преобразованию, а случай

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ji} \quad (4)$$

характеризует особый вид проективного преобразования, которое называется *инволюцией*. Согласно предыдущему *инволюция есть такое нетождественное проективное преобразование точек прямой, которое, будучи применено дважды, возвращает все точки этой прямой на их старые места*.

Учитывая, что поляритет определяет сопряженность точек на прямой условием

$$a_{ij}x^i y^j = 0, \quad (5)$$

где a_{ij} симметричен, мы видим, что *поляритет индуцирует инволюцию на всякой прямой пространства*.

Инволюции классифицируются по характеру своих *двойных элементов*, т. е. точек, соответствующих самим себе и, следовательно, удовлетворяющих уравнению

$$a_{ij}v^i v^j = 0.$$

Так как в двумерной области это уравнение является квадратным относительно отношения $v^1 : v^2$, то возможны три случая, характеризуемые величиной дискриминанта

$$a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

1. Если $a < 0$, то существуют два действительных двойных элемента и инволюция называется *гиперболической*.

2. Если $a > 0$, то двойные элементы мнимы и инволюция называется *эллиптической*.

3. Если $a = 0$, то существует один действительный двойной элемент и инволюция называется *параболической*.

Ограничиваясь сначала гиперболической инволюцией, будем искать ангармоническое отношение пары точек x^i и y^i и пары двойных элементов инволюции a_{ij} .

Пусть вектор двойного элемента

$$v^i = \lambda x^i + \mu y^i,$$

тогда

$$\lambda^2 a_{ij} x^i x^j + 2\lambda \mu a_{ij} x^i y^j + \mu^2 a_{ij} y^i y^j = 0;$$

решая это уравнение относительно $\frac{\mu}{\lambda}$, мы получим

$$\begin{aligned} (xyv_1v_2) &= \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2} = \\ &= \frac{-a_{ij}x^i y^j + \sqrt{(a_{ij}x^i y^j)^2 - a_{ij}x^i x^j a_{kl}y^k y^l}}{-a_{pq}x^p y^q + \sqrt{(a_{pq}x^p y^q)^2 - a_{pq}x^p x^q a_{rs}y^r y^s}}. \end{aligned} \quad (6)$$

В частности, для того чтобы точки x и y гармонически разделялись двойными элементами, должно иметь место равенство

$$a_{ij}x^i y^j = 0, \quad (7)$$

т. е. мы получили условие сопряженности.

Итак, точки, соответствующие в гиперболической инволюции, разделяются гармонически ее двойными элементами.

Этот результат показывает, что инволюция вполне определяется заданием своих двойных элементов. Тензор инволюции может быть выражен и через векторы ее двойных элементов v^i и w^j следующим образом:

$$a_{ij} = v_{(i} w_{j)}, \quad (8)$$

так как в этом случае

$$a_{ij}v^i v^j = a_{ij}w^i w^j = 0.$$

В предыдущем параграфе мы говорили о мнимых поверхностях второго порядка, имея при этом в виду некоторый поляритет. Совершенно аналогично будем говорить, что эллиптическая инволюция представляет пару мнимо сопряженных точек — своих двойных элементов. После этого мы можем сказать, что задание всякой инволюции равносильно заданию пары точек, действительных, мнимо сопряженных или совпадающих.

Ангармоническое отношение пары точек x^i, y^j и двойных элементов инволюции a_{ij} будем определять выражением (6) и в том случае, когда двойные элементы мнимы. Для дальнейшего подвергнем это выражение некоторым

преобразованиям. Прежде всего,

$$a_{ij}a^{ij} = \varepsilon^{ip}\varepsilon^{jq}a_{ij}a_{pq} = 2(\varepsilon^{12})^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2),$$

откуда

$$a_{ij}a^{ij} = 2 \frac{a}{\varepsilon^2}, \quad (9)$$

где a — дискриминант тензора a_{ij} , а $\varepsilon = \varepsilon_{12}$ — существенная компонента бивектора, служащего вертором. Подкоренное выражение в (6) может быть преобразовано так:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{ij}x^ix^j & a_{ij}x^iy^j \\ a_{ij}x^iy^j & a_{ij}y^iy^j \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{vmatrix}^2 = \frac{a}{\varepsilon_2} (\varepsilon_{ij}x^iy^j)^2 = \\ &= \frac{1}{2} a^{ij}a_{ij} (x_k y^k)^2. \end{aligned} \quad (10)$$

В результате ангармоническое отношение $(xyvw)$, где v и w — двойные элементы инволюции, принимает вид

$$(xyvw) = \frac{-a_{ij}x^iy^j + (x_k y^k) \sqrt{-\frac{a_i^j a_j^i}{2}}}{-a_{ij}x^iy^j - (x_k y^k) \sqrt{-\frac{a_i^j a_j^i}{2}}}. \quad (11)$$

Предположим теперь, что x^i, y^j — двойные элементы инволюции b_{ij} , так что $b_{ij}x^ix^j = b_{ij}y^iy^j = 0$. Применив формулу (10), получим

$$-(b_{ij}x^iy^j)^2 = \frac{1}{2} b^{ij}b_{ij} (x_k y^k)^2,$$

но

$$b^{ij} = x^{(i}y^{j)}, \quad (12)$$

вследствие чего

$$(x_k y^k)^2 = -2b^{ij}b_{ij}. \quad (13)$$

Вычислим ангармоническое отношение пар двойных элементов v, w и x, y инволюций a_{ij} и b_{ij} . Из (12) следует, что

$$a_{ij}x^iy^j = a_{ij}b^{ij}, \quad (14)$$

и, таким образом,

$$(xyvw) = \frac{-a_{ij}b^{ij} + \sqrt{(a_i^j a_j^i)(b_p^q b_q^p)}}{-a_{ij}b^{ij} - \sqrt{(a_i^j a_j^i)(b_p^q b_q^p)}}. \quad (15)$$

Формула (15) показывает, что условие гармонического разделения двойных элементов инволюций a_{ij} и b_{ij} имеет вид

$$a_{ij}b^{ij} = 0. \quad (16)$$

Такие инволюции называются *аполярными*.

Для разыскания псевдотензора инволюции s^{ij} , аполярной данной инволюции a_{ij} , мы должны решить однородное уравнение

$$s^{ij}a_{ij} = s^{11}a_{11} + 2s^{12}a_{12} + s^{22}a_{22} = 0$$

с тремя неизвестными: s^{11} , s^{12} , s^{22} . Значит, инволюция s^{ij} определяется однозначно, если она аполярна двум данным различным инволюциям: a_{ij} и b_{ij} , причем компоненты s^{ij} определяются из двух однородных уравнений:

$$s^{ij}a_{ij} = 0, \quad s^{ij}b_{ij} = 0.$$

Условие того, чтобы три инволюции a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} допускали существование аполярной им инволюции s^{ij} , очевидно, имеет вид линейной зависимости тензоров этих инволюций:

$$\lambda a_{ij} + \mu b_{ij} + \nu c_{ij} = 0. \quad (17)$$

Мы будем называть такие инволюции *комполярными*.

Покажем теперь, что тензор инволюции s_{ij} , аполярной инволюциям a_{ij} и b_{ij} , имеет следующий вид:

$$s_{ij} = a_{(i}^k b_{j)k}. \quad (18)$$

Действительно, перебрасывая индексы в выражении $a^{ij}s_{ij}$, мы получим

$$a^{ij}s_{ij} = a^{ij}a_i^k b_{jk} = -a_i^j a^{ik} b_{jk} = -a^{ik}s_{ik},$$

откуда

$$a^{ij}s_{ij} = 0,$$

и, аналогично,

$$b^{ij}s_{ij} = 0.$$

Из (18) следует, что условие комполярности трех инволюций a_{ij} , b_{ij} и c_{ij} имеет вид

$$a_i^j b_j^k c_k^i = 0. \quad (19)$$

§ 21. Геометрия кубической бинарной формы

Подобно тому, как симметричный тензор b_{ij} определяет пару точек проективной прямой, симметричный тензор третьей валентности B_{ijk} определяет тройку *нулевых* точек этого тензора, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$B_{ijk} x^i x^j x^k = 0. \quad (1)$$

Если эти три точки определяются координатами x^i , y^j , z^k , то тензор B_{ijk} может быть выражен через них:

$$B_{ijk} = x_{(i} y_j z_{k)}. \quad (2)$$

Будем говорить, что симметричные тензоры b_{ij} и B_{ijk} *аполяры*, если они удовлетворяют условию

$$b^{ij} B_{ijk} = 0. \quad (3)$$

Чтобы найти геометрический смысл условия апolarity, предположим тензор b_{ij} невырожденным и, пользуясь (2), запишем условие (3) в следующем виде:

$$b^{ij} x_i y_j z_k + b^{ij} y_i z_j x_k + b^{ij} z_i x_j y_k = 0.$$

Предположим сначала, что все нулевые точки различны, и рассмотрим точку $\bar{z}_k$ — четвертую гармоническую точки z_k относительно пары точек x_i и y_j . Согласно (17,8)

$$b^{ij} x_i y_j \bar{z}_k + b^{ij} y_i z_j x_k - b^{ij} z_i x_j y_k = 0,$$

откуда

$$(b^{ij} x_i y_j)^2 b^{kl} z_k \bar{z}_l = 0.$$

Равенство нулю первого множителя невозможно, так как оно влечет за собою совпадение точек x_k и y_k и, следовательно,

$$b^{kl} z_k z_l = 0.$$

Итак, если тензор B_{ijk} с различными нулевыми точками *аполярен* тензору b_{ij} , то четвертая гармоническая

каждой нулевой точки первого по отношению к двум другим сопряжена с нею в инволюции, определяемой вторым.

Предполагая, что две нулевые точки B_{ij} совпадают, и считая, что $x_i = y_i$, мы будем иметь

$$b^{ij}x_i x_j z_k = -2b^{ij}x_i z_j x_k, \quad (*)$$

откуда

$$(b^{ij}x_i x_j)(b^{kl}z_k x_l) = -2(b^{ij}x_i z_j)(b^{kl}x_k x_l),$$

и, следовательно,

$$(b^{ij}x_i x_j)(b^{kl}z_k x_l) = 0,$$

что при сравнении с (*) дает

$$b^{ij}x_i x_j = 0, \quad b^{kl}z_k x_l = 0.$$

Последнее из двух полученных равенств показывает, что точка z_k совпадает с x_k , а согласно первому x_k — двойная точка инволюции b_{ij} .

Итак, если среди нулевых точек тензора B_{ijk} , аполярного тензору b_{ij} , есть совпадающие, то все три нулевые точки совпадают между собою и с двойной точкой инволюции b_{ij} .

Тензор

$$D_{ijk} = b_{is}B^s_{jk}, \quad (4)$$

где b_{ij} и B_{ijk} аполярны, симметричен по всем своим индексам, так как вследствие (3)

$$D^r_{rk} = -b^{rs}B_{rsk} = 0. \quad (5)$$

Чтобы найти нулевые точки v^i этого тензора, разрешим уравнение (4) относительно B^s_{ij} , предполагая, что бивектор, с помощью которого перебрасываются индексы, является дискриминантным бивектором тензора b_{ij} , так что

$$b_{ik}b^{kj} = \sigma\delta^j_i.$$

В таком случае

$$B_{ijk} = -\sigma b_{is}D^s_{jk}, \quad (6)$$

откуда в свою очередь

$$D_{ijk} = -\sigma b_{is}b_{jr}D^{sr}_{k} = -\sigma b_{is}b_{jr}b_{kt}B^{srt}. \quad (7)$$

Но тогда

$$b_{is}b_{jr}b_{kt}B^{srt}v^i v^j v^k = 0;$$

следовательно, нулевые точки тензора D_{ijk} сопряжены в инволюции b_{ij} нулевым точкам тензора B_{ijk} . Условия аполярности (3) составляют систему двух однородных уравнений с неизвестными b_{ij} , которые можно вообще определить, т. е. найти инволюцию, аполярную тензору B_{ijk} . Для того чтобы получить это решение в тензорной форме, рассмотрим тензор

$$b^{rs}B^m_{\cdot ri}B_{msj} = -B^m_{\cdot ri}D^r_{m\cdot j};$$

так как

$$b^{rs}B^m_{\cdot ri}B_{msj} = -b^{rs}B_{mri}B^m_{\cdot sj} = -b^{rs}B^m_{\cdot rj}B_{msi},$$

то он кососимметричен и, следовательно,

$$B^m_{\cdot ri}D^r_{m\cdot j} = \lambda \varepsilon_{ij}.$$

Но в таком случае

$$B^m_{\cdot ri}B^r_{\cdot m\cdot k}b_{kj} = \lambda \varepsilon_{ij},$$

откуда

$$B^m_{\cdot ni}B^n_{\cdot mj} = Ib_{ij}, \quad (8)$$

где

$$I = \frac{1}{2} \tilde{b}^{ij} B^m_{\cdot ni} B^n_{\cdot mj}, \quad (9)$$

а тензор $\tilde{b}^{ij}$ обратен тензору b_{ij} .

Если двойные точки инволюции b_{ij} приняты за базисные, то

$$b_{11} = b_{22} = 0,$$

а из условий аполярности (3) следует

$$B_{112} = B_{221} = 0, \quad (10)$$

так что

$$I = -\frac{B_{111}B_{222}}{\varepsilon b_{12}}. \quad (11)$$

При обращении инварианта I в нуль либо B_{111} , либо B_{222} тоже обращаются в нуль, а это значит, что уравнение (1) имеет три совпавших корня. Таким образом, *совпадение*

трех точек, определяемых уравнением (1), характеризуется условием

$$I = 0. \quad (12)$$

§ 22. Пространство K_n

Пространством n измерений с проективной метрикой или пространством K_n называется такое пространство, образом точки которого является точка проективного пространства P_n , а фундаментальной группой — подгруппа проективных преобразований, сохраняющих некоторый поляритет. Этот поляритет называется абсолютным поляритетом пространства K_n .

Согласно этому определению аффинор преобразования фундаментальной группы K_n , которую принято называть группой движений, удовлетворяет условию

$$\Phi_\alpha^\lambda \Phi_\beta^\mu a_{\lambda\mu} = \nu a_{\alpha\beta}, \quad (1)$$

где $a_{\alpha\beta}$ — тензор абсолютного поляритета.

Найдем число параметров, от которых зависит фундаментальная группа K_n . Для этого отнесем поляритет к автополярному реперу и будем иметь

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = \sum_1^{n+1-\delta} \varepsilon_\alpha (x^\alpha)^2, \quad (2)$$

где δ — дефект поляритета, или число независимых особых точек, а $\varepsilon_\alpha = \pm 1$. В силу закона инерции квадратичных форм это уравнение должно сохраниться для всех автополярных реперов при специальном выборе единичной точки, а отсюда следует, что число параметров группы равно числу параметров, определяющих те проективные реперы, по отношению к которым форма $a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$ имеет вид (2). Подсчитаем это число. Выбор первой вершины A_1 репера произволен, что дает n параметров. Вторая вершина должна быть выбрана среди точек полярной гиперплоскости точки A_1 , что дает еще $n - 1$ параметр. Эти рассуждения мы можем продолжать до тех пор, пока полярная некоторой вершины не будет местом особых точек, а это произойдет при $k = n + 1 - \delta$. Действительно, вершину $A_{n+2-\delta}$ мы должны выбрать на многообразии $n + 1 - k = n + 1 - (n + 2 - \delta) = \delta - 1$ измерений, которое является

местом особых точек. Число параметров, отмеченных до сих пор,

$$s_1 = n + (n - 1) + \dots + (n - k + 1) = \\ = n + (n - 1) + \dots + \delta.$$

Так как все остальные вершины репера в числе δ принадлежат месту особых точек, то выбор их совершенно произволен. Более того, их нормирование тоже произвольно, но существенно для выбора единичной точки репера. Поэтому, выбрав их, мы можем заменить их произвольной линейной комбинацией, располагая при этом еще δ^2 коэффициентами. Таким образом, полное число параметров, определяющих выбор репера,

$$s = n + (n - 1) + \dots + \delta + \delta^2 = n + (n - 1) + \dots \\ \dots + 1 + \delta^2 - [(\delta - 1) + (\delta - 2) + \dots + 1] = \\ = \frac{n(n+1)}{2} + \delta^2 - \frac{(\delta-1)\delta}{2}.$$

Итак, число параметров группы движений K_n

$$s = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{\delta(\delta+1)}{2}, \quad (3)$$

где δ — дефект абсолютного поляритета.

Если в пространстве K_n заданы две точки x^α и y^α , то на прямой, их соединяющей, определяется инволюция (полярная инволюция), индуцируемая абсолютным поляритетом. Анггармоническое отношение точек x и y и двойных элементов v и w инволюции определяется по формуле (20,6) как

$$(xyvw) = \frac{-\Omega + \sqrt{\Omega^2 - \Omega_1\Omega_2}}{-\Omega - \sqrt{\Omega^2 - \Omega_1\Omega_2}},$$

где

$$\Omega_1 = a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta, \quad \Omega_2 = a_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta, \quad \Omega = a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta;$$

так как если репер на прямой x, y задан с помощью двух точек b_1^α, b_2^α и

$$a_{ij} = a_{\alpha\beta}b_i^\alpha b_j^\beta,$$

то

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta = a_{ij}x^i y^j,$$

где x^i и y^i — координаты точек x, y на прямой.

Введенное ангармоническое отношение, очевидно, сохраняется при движении, равно как и всякая его функция. Рассмотрим в качестве такой функции логарифм ангармонического отношения точек x и y и двойных точек полярной инволюции, умноженный на некоторую масштабную константу $\frac{r}{2i}$ *), и будем называть его *расстоянием между точками x и y* , полагая

$$\overline{xy} = \frac{r}{2i} \ln(xyvw). \quad (4)$$

Такой выбор функции объясняется ее свойством, носящим название *аддитивности* и позволяющим записать для расстояний трех точек, лежащих на одной прямой, соотношение

$$\overline{xy} + \overline{yz} + \overline{zx} = 0. \quad (5)$$

Чтобы убедиться в его справедливости, разложим вектор каждой точки x, y, z по векторам двойных точек, предположив, что они различны:

$$x = \lambda_1 v + \mu_1 w, \quad y = \lambda_2 v + \mu_2 w, \quad z = \lambda_3 v + \mu_3 w.$$

В таком случае

$$\begin{aligned} \overline{xy} &= \frac{r}{2i} \ln \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} : \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right), & \overline{yz} &= \frac{r}{2i} \ln \left(\frac{\mu_3}{\mu_2} : \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right), \\ \overline{zx} &= \frac{r}{2i} \ln \left(\frac{\mu_1}{\mu_3} : \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right), \end{aligned}$$

откуда следует (5).

Формуле (4), определяющей расстояние, можно придать более удобный вид, рассмотрев комбинацию

$$\cos \frac{\overline{xy}}{r} = \frac{1}{2} \left(\exp \frac{i\overline{xy}}{r} + \exp \left(-\frac{i\overline{xy}}{r} \right) \right).$$

Но

$$\exp \frac{i\overline{xy}}{r} = \left(\frac{\Omega - \sqrt{\Omega^2 - \Omega_1 \Omega_2}}{\Omega + \sqrt{\Omega^2 - \Omega_1 \Omega_2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\Omega - \sqrt{\Omega^2 - \Omega_1 \Omega_2}}{\sqrt{\Omega_1} \sqrt{\Omega_2}}$$

*) Масштабную константу по возможности выбирают так, чтобы расстояние было действительным.

и, аналогично,

$$\exp\left(-\frac{i\overline{xy}}{r}\right) = \frac{\Omega + \sqrt{\Omega^2 - \Omega_1\Omega_2}}{\sqrt{\Omega_1}\sqrt{\Omega_2}},$$

откуда

$$\cos \frac{\overline{xy}}{r} = \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega_1}\sqrt{\Omega_2}}. \quad (6)$$

Указанный способ измерения расстояний в пространстве с заданным абсолютном Q_{n-1} называется *проективной метрикой*. Задание этой метрики равносильно заданию абсолюта Q_{n-1} , или выделению подгруппы таких проективных преобразований, которые сохраняют эту метрику.

В силу принципа двойственности все сказанное о проективной метрике можно отнести и к *проективной метрике второго рода*, которая определяется подгруппой проективных преобразований, сохраняющих поляритет второго рода. Роль расстояния между такими точками играет в этом случае *угол между гиперплоскостями*, который можно определить как логарифм ангармонического отношения между этими плоскостями и двумя плоскостями, принадлежащими абсолютной связке, причем этот логарифм снабжается масштабным множителем, выбор которого диктуется соображениями удобства. Так же как и для расстояния, для угла между двумя гиперплоскостями ξ и η мы будем иметь формулу

$$\cos \frac{\widehat{\xi\eta}}{r} = \frac{a^{\alpha\beta}\xi_\alpha\eta_\beta}{\sqrt{a^{\lambda\mu}\xi_\lambda\xi_\mu}\sqrt{a^{\sigma\rho}\eta_\sigma\eta_\rho}}. \quad (7)$$

Понятие угла можно распространить на любые P_m , принадлежащие одному P_{m+1} , вычисляя этот угол по отношению к поляритету, индуцируемому в P_{m+1} абсолютным поляритетом в P_n .

Проективная метрика, заданная в P_n , индуцирует проективную метрику на всякой гиперплоскости и в каждой связке, за элемент которой принята принадлежащая ей прямая. Метрику в связке с центром O можно определить, рассматривая гиперплоскость Ω , полярную точке O , и называя *углом между двумя прямыми* OA и OB расстояние $\overline{AB}$ между точками их пересечения с гиперплоскостью

Ω. В частности, эти прямые называются *ортогональными* между собою, если точки A и B сопряжены полярно.

Рассмотрим, наконец, две плоскости дополнительного числа измерений P_m и P_{n-m} , пересекающиеся в точке A . Такие плоскости называются *вполне ортогональными*, если всякие две прямые, которые проходят через A — одна в P_m , а другая в P_{n-m} , — взаимно ортогональны.

Существование вполне ортогональных плоскостей и их построение характеризуются следующей теоремой: *для того чтобы P_m и P_{n-m} , проходящие через одну точку, были вполне ортогональными, необходимо и достаточно, чтобы они содержали взаимно полярные P_{m-1} и P_{n-m-1} .*

Действительно, каждая точка P_{m-1} сопряжена каждой точке P_{n-m-1} , всякая прямая в P_m пересекает P_{m-1} , а прямая в P_{n-m} пересекает P_{n-m-1} , и, следовательно, прямые, выходящие из точки A пересечения P_m и P_{n-m} , в этих плоскостях содержат сопряженные точки, т. е. ортогональны между собою.

§ 23. Пространство K_n с невырожденным абсолютном

Если абсолютный поляритет не вырождается, то ему отвечает вполне определенный обратный поляритет второго рода, а соотношение между полюсами и полярами взаимно однозначно. Тензор $a_{\alpha\beta}$ такого поляритета можно принять за вертор, и в таком случае всякий вектор или тождественный ему ковектор будет представлять и точку, и гиперплоскость, абсолютно полярную этой точке. Выбирая масштабную константу так, чтобы она была одинаковой для пары точек и пары их абсолютных поляр, мы должны считать, что величина φ в формуле

$$\cos \frac{\varphi}{r} = \frac{xy}{\sqrt{x^2} \sqrt{y^2}} \quad (1)$$

выражает как расстояние между точками, так и угол между абсолютными полярами этих точек.

Невырожденные поляритеты отличаются между собою сигнатурой, т. е. количеством положительных и отрицательных членов в квадратичной форме

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = \sum_1^{n+1} \varepsilon_\alpha (x^\alpha)^2,$$

отнесенной к автополяроному реперу. Среди различных комбинаций знаков особенно существенны две;

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = \sum_1^{n+1} (x^\alpha)^2, \quad (I)$$

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = \sum_1^n (x^\alpha)^2 - (x^{n+1})^2. \quad (II)$$

В первом случае мы будем называть поляритет *эллиптическим*, а во втором — *гиперболическим*.

Так как форма (I) является положительно определенной, то для всякой точки мы будем иметь

$$x^2 > 0, \\ -1 \leq \frac{xy}{\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}} \leq +1$$

и, полагая масштабную константу $r = 1$, получим для эллиптического случая, что

$$\cos \varphi = \frac{xy}{\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}}, \quad (2)$$

где φ — расстояние между двумя точками или угол между их полярами, всегда выражается действительным числом.

В гиперболическом случае все точки пространства разбиваются на три существенно различных класса в зависимости от того, каков характер поляритета, индуцируемого на полярах этих точек. Если этот поляритет эллиптический, то точки называются *внутренними*. Примером такой точки может служить точка с координатами

$$x^1 = x^2 = \dots = x^n = 0, \quad x^{n+1} = 1,$$

так как в плоскости $\xi_{n+1} = 0$ определяется поляритет, соответствующий форме

$$\sum_1^n (x^\alpha)^2.$$

Если же этот поляритет гиперболический (как, например, для точки $x^1 = 1, x^2 = \dots = x^n = x^{n+1} = 0$), то точка называется *внешней*. И, наконец, если точка принадлежит абсолюту

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0,$$

то на ее поляре определяется вырожденный поляритет, а точку мы будем называть *изотропной*.

Выбирая нормирование матрицы $a_{\alpha\beta}$ так, чтобы после перехода к автополярному реперу иметь равенство (II), мы можем различать внутренние, внешние и изотропные точки по характеру следа x^2 . Действительно, для внутренних точек $x^2 < 0$, для внешних $x^2 > 0$, а для изотропных $x^2 = 0$. Первые два условия имеют место для указанных выше вершин автополярного тетраэдра, но они должны сохраняться и при всех движениях.

Если нам даны две точки x и y , причем первая из них внутренняя, и они сопряжены, то мы можем взять их за две вершины автополярного репера так, чтобы их координатами были $x(0, \dots, 0, 1)$, $y(1, 0, \dots, 0)$.

Рассматривая каноническую форму (II), легко убедиться в справедливости следующих теорем:

1. Точка, сопряженная внутренней, внешняя.
2. На всякой гиперплоскости, полярной внешней точке, есть внутренние точки (для гиперплоскости $x^1 = 0$ это те точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $(x^2)^2 + \dots + (x^n)^2 - (x^{n+1})^2 < 0$).

В соответствии с последним результатом мы будем называть поляры внешних точек *внутренними*, поляры внутренних точек — *внешними*, а поляры изотропных точек — *изотропными* гиперплоскостями гиперболического пространства.

Рассмотрим две внутренние точки x и y и образуем из их векторов выражение

$$u^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{-x^2}} + \frac{y}{\sqrt{-y^2}} \right)^2 = 2 \left(-1 + \frac{xy}{\sqrt{-x^2}\sqrt{-y^2}} \right).$$

Изменим, если это нужно, нормирование одного из векторов так, чтобы след xy был отрицателен. В таком случае u^2 отрицательно, т. е. точка u внутренняя. Но в таком случае точка

$$v = \frac{x}{\sqrt{-x^2}} - \frac{y}{\sqrt{-y^2}}$$

внешняя, так как

$$uv = 0,$$

и, следовательно,

$$v^2 = 2 \left(-1 - \frac{xy}{\sqrt{-x^2} \sqrt{-y^2}} \right) > 0,$$

или

$$-\frac{xy}{\sqrt{-x^2} \sqrt{-y^2}} > 1.$$

Полагая масштабную константу $r = i$, мы получим соотношение

$$\operatorname{ch} \overline{xy} = -\frac{xy}{\sqrt{-x^2} \sqrt{-y^2}}, \quad (3)$$

которое определит расстояние между внутренними точками как действительное число.

Для внутренних гиперплоскостей ξ и η , пересекающихся во внутренней точке,

$$(\lambda\xi + \mu\eta)^2 > 0$$

при любых λ и μ , так как гиперплоскость $\lambda\xi + \mu\eta$ проходит через ту же точку, т. е. является внутренней. Вследствие этого можно повторить рассуждение вывода формулы (2) и, полагая масштабную константу $r = 1$, определить действительный угол между этими гиперплоскостями формулой

$$\cos \widehat{\xi\eta} = \frac{\xi\eta}{\sqrt{\xi^2} \sqrt{\eta^2}}. \quad (4)$$

Формулы, приведенные выше, выглядят особенно просто, если воспользоваться возможностью нормирования псевдовекторов. Нормирование, определенное условием

$$x^2 = \varepsilon,$$

где ε — соответствующим образом подобранная константа, называется *нормированием Вейерштрасса*, а координаты нормированного вектора, взятые по отношению к автополярному реперу, называются *координатами Вейерштрасса*.

В случае эллиптической геометрии и для внутренних гиперплоскостей гиперболического пространства можно положить $\varepsilon = 1$, а для внутренних точек гиперболического пространства $\varepsilon = -1$. В результате мы будем иметь: в эллиптической геометрии

$$\cos \overline{xy} = xy; \quad (5)$$

в гиперболической для внутренних точек

$$\operatorname{ch} \overline{xy} = \pm xy^*), \quad (6)$$

а для внутренних гиперплоскостей, пересекающихся во внутренней точке,

$$\cos \widehat{\xi\eta} = \xi\eta. \quad (7)$$

В условиях того же нормирования для точек прямой, проходящей через две полярно сопряженные точки, мы будем иметь: в эллиптическом случае

$$z = x \cos t + y \sin t; \quad (8)$$

в гиперболическом случае

$$z = x \operatorname{ch} t + y \operatorname{sh} t, \quad (9)$$

где $t = \overline{xz}$, причем точка x считается внутренней. Для всякого пучка гиперплоскостей в эллиптическом случае и для пучка гиперплоскостей, проходящих через внутреннюю точку, в гиперболическом случае получаем

$$\xi = \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi, \quad (10)$$

где

$$\varphi = \widehat{\xi\eta}.$$

Гиперболическое пространство K_n имеет особое значение в истории геометрии, так как оно представляет собой проективную интерпретацию геометрии Лобачевского, с помощью которой Клейн дал первое строгое доказательство непротиворечивости этой геометрии.

§ 24. Аффинная подгруппа проективной группы

Поляритет можно назвать *вполне вырожденным*, если ранг ρ матрицы $\|a_{\alpha\beta}\|$ равен 1. В этом случае квадратичная форма

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = (\omega_\alpha x^\alpha)^2 \quad (1)$$

представляет собой полный квадрат линейной формы. Место особых точек определяется уравнением

$$\omega x = \omega_\alpha x^\alpha = 0 \quad (2)$$

*) Нормирование Вейерштрасса определяется с точностью до знака и так, чтобы произведение $\pm xy$ было положительным.

и является гиперплоскостью, которую мы будем называть *несобственной гиперплоскостью* пространства. Особые точки, т. е. точки, принадлежащие этой гиперплоскости, будут также называться *несобственными*, равно как и все m -плоскости, состоящие из таких точек. Для точек, не принадлежащих несобственной гиперплоскости, можно ввести нормирование

$$\omega x = 1, \quad (3)$$

аналогичное нормированию Вейерштрасса. В дальнейшем в этом параграфе условие этого нормирования предполагается выполненным.

Всякая точка $X = x - y$ несобственная, так как

$$\omega X = 0.$$

Чтобы отличить несобственные точки, условимся обозначать их большими буквами.

Введя в рассмотрение некоторую фиксированную начальную собственную точку x_0 , мы получим для всякой другой собственной точки

$$x = x_0 + X.$$

Задание вектора X , или *радиуса-вектора* точки x по отношению к начальной точке x_0 , определяет точку x и, обратно, определяется ее заданием. Иными словами, *все собственные точки пространства находятся во взаимно однозначном соответствии со своими радиусами-векторами по отношению к фиксированному началу.*

Но радиусы-векторы соответствуют точкам несобственной гиперплоскости и, следовательно, образуют векторное пространство n измерений.

При преобразовании группы, сохраняющей поляритет, точки несобственной гиперплоскости переходят в ее же точки, поэтому для любой точки пространства справедливы соотношения

$$y = \Phi x,$$

$$Y + x_0 = \Phi X + \Phi x_0,$$

или

$$Y = \Phi X + c.$$

Отсюда следует, что группа движений в пространстве с вполне вырожденным абсолютном изоморфна группе аф-

финных преобразований в пространстве радиусов-векторов точек этого пространства, или, иначе говоря, группа аффинных преобразований есть подгруппа группы проективных преобразований, состоящая из преобразований, переводящих в себя некоторую гиперплоскость.

Число параметров аффинной группы может быть получено из (22,3) при $\delta = n$:

$$s = n(n + 1),$$

а ее репер с проективной точки зрения состоит из точек, одна из которых собственная, а остальные n — несобственные.

Выясним проективную природу некоторых других понятий аффинной геометрии.

Формула (11,7), выражающая радиус-вектор точки, делящей отрезок в отношении λ :

$$Z = \frac{X + \lambda Y}{1 + \lambda},$$

может быть приведена введением нормированных векторов точек $x = x_0 + X$, $y = x_0 + Y$, $z = x_0 + Z$ к виду

$$(1 + \lambda)z = x + \lambda y.$$

С другой стороны,

$$V = x - y$$

есть несобственная точка прямой x, y , и поэтому

$$-(xyzV) = \lambda.$$

Итак, отношение λ отличается только знаком от ангармонического отношения концов отрезка, делящей точки z и несобственной точки прямой. В частности, середина отрезка и несобственная точка прямой гармонически разделяют концы отрезка.

Так как вектор отрезка равен разности радиусов-векторов, то уравнение всякой P_m можно представить в виде

$$x = a + \sum_1^m u^h A_h,$$

где a — собственная, а A_h — независимые несобственные точки.

Эти точки определяют несобственную P_{m-1} , принадлежащую данной P_m .

Если

$$y = b + \sum_1^q \nu^k B_k$$

— другая P_q , при $q \leq m$ параллельная P_m , то несобственная P_{q-1} второй плоскости принадлежит несобственной P_{m-1} первой плоскости.

В заключение заметим, что, применяя принцип двойственности, можно распространить предыдущие соображения на центроаффинное пространство, в котором центральная точка двойственна несобственной гиперплоскости.

Нормирование ковектора гиперплоскости ξ :

$$\xi x_0 = 1,$$

где x_0 — центральная точка, аналогично нормированию Вейерштрасса. Гиперплоскость

$$\zeta = \frac{\xi + \lambda \eta}{1 + \lambda}$$

принадлежит пучку, определяемому гиперплоскостями ξ и η , а

$$\lambda = -(\xi \eta \zeta \Omega),$$

где Ω проходит через центральную точку. В частности, если

$$\zeta = \frac{\xi + \eta}{2},$$

то четверка ξ, η, ζ, Ω гармоническая.

§ 25. Проективная схема евклидова пространства

Наряду с уже рассмотренными пространствами K , особое значение имеют еще те пространства, абсолютный поляритет которых имеет ранг $\rho = n$. Мы рассмотрим такую метрику, предполагая, что она определена поляритетом второго рода

$$x^\alpha = a^{\alpha\beta} \xi_\beta, \quad (1)$$

причем уравнение

$$a^{\alpha\beta} \omega_\beta = 0 \quad (2)$$

имеет единственное независимое решение. Так как особая гиперплоскость ω_β сохраняется при преобразованиях фундаментальной группы, то она является подгруппой группы аффинных преобразований. Число параметров этой подгруппы, согласно формуле (22,3), равно

$$s = \frac{n(n+1)}{2} + 1,$$

т. е. на единицу больше числа параметров группы движений пространства с невырожденным абсолютном.

В § 19 мы видели, что вырожденный поляритет определяет невырожденный поляритет в характеристическом многообразии связки своих особых гиперплоскостей ω . Отнесем пространство к автополярному реперу, все вершины которого, кроме последней, лежат в такой несобственной гиперплоскости, и будем предполагать, что греческие индексы принимают значения от 1 до $n+1$, а латинские — от 1 до n . В таком случае координаты несобственной плоскости $\omega_i = 0$, и пусть, кроме того, $\omega_{n+1} = 1$. Несобственные точки характеризуются условием $x^{n+1} = 0$, а собственные, нормированные по Вейерштрассу, — условием $\omega_\alpha x^\alpha = 1$, или $x^{n+1} = 1$. Для координат тензора основного поляритета вследствие (2) мы будем иметь

$$a^{\alpha n+1} = 0, \quad \text{Det} \| a^{ij} \| \neq 0, \quad (3)$$

а в пространстве P_{n-1} , совпадающем с гиперплоскостью ω , поляритет a^{ij} будет допускать существование обратного ему поляритета первого рода, координаты тензора a_{ij} которого связаны с a^{ij} условием

$$a_{ik} a^{kj} = \delta_i^j. \quad (4)$$

Введем теперь в рассмотрение следующие тензоры пространства B_{n+1} : тензор $A_{\alpha\beta}$, координаты которого определены равенствами

$$A_{ij} = a_{ij}, \quad A_{\alpha n+1} = A_{n+1 \alpha} = 0, \quad (5)$$

тензор

$$A_{\alpha\beta, \lambda\mu} = 4\omega_{[\alpha} A_{\beta]} [\lambda \omega_{\mu]}, \quad (6)$$

обладающий такими свойствами симметрии:

$$A_{\alpha\beta, \lambda\mu} = -A_{\beta\alpha, \lambda\mu}, \quad A_{\alpha\beta, \lambda\mu} = A_{\lambda\mu, \alpha\beta}, \quad (7)$$

и тензор

$$a_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \frac{1}{(n-1)!} e_{\alpha\beta\gamma_1\dots\gamma_{n-1}} e_{\lambda\mu\delta_1\dots\delta_{n-1}} a^{\gamma_1\delta_1} \dots a^{\gamma_{n-1}\delta_{n-1}}, \quad (8)$$

где $e_{\alpha_1\dots\alpha_{n+1}}$ — некоторый поливектор валентности $n+1$.

По отношению к автополяренному реперу тензор (6) характеризуется равенствами

$$A_{ij,\lambda\mu} = 0, \quad A_{i\,n+1,j\,n+1} = -a_{ij}. \quad (9)$$

С другой стороны,

$$a_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \frac{1}{(n-1)!} e_{\alpha\beta k_1\dots k_{n-1}} e_{\lambda\mu l_1\dots l_{n-1}} a^{k_1 l_1} \dots a^{k_{n-1} l_{n-1}},$$

так как

$$a^{\alpha\,n+1} = 0, \quad a_{ij,\lambda\mu} = 0,$$

вследствие того что латинские индексы не могут принимать $n+1$ разных значений. Кроме того,

$$a_{i\,n+1,j\,n+1} = a_{ij} \left(\frac{a}{e^2} \right),$$

так как в правой части стоит минор матрицы $\|a^{ij}\|$, а ее приведенный минор равен a_{ij} . Выбирая существенную компоненту поливектора так, чтобы согласно со знаком a выполнялось условие

$$\frac{a}{e^2} = \sigma = \pm 1,$$

мы получим

$$A_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \sigma a_{\alpha\beta,\lambda\mu}. \quad (10)$$

Составим выражение

$$s = a_{\alpha\beta,\lambda\mu} x^\alpha x^\lambda y^\beta y^\mu, \quad (11)$$

где x^α и y^β — нормированные координаты двух собственных точек. Согласно (6)

$$\begin{aligned} s &= 4\sigma \omega_{[\alpha} A_{\beta][\lambda} \omega_{\mu]} x^\alpha x^\lambda y^\beta y^\mu = \\ &= -2\sigma (x^\beta - y^\beta) A_{\beta[\lambda} \omega_{\mu]} x^\lambda y^\mu = -\sigma A_{\beta\lambda} (x^\beta - y^\beta) (x^\lambda - y^\lambda), \end{aligned}$$

или, окончательно,

$$s = \sigma a_{ij} (x^i - y^i) (x^j - y^j). \quad (12)$$

Выражение $a_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ содержит поливектор e . Рассматривая эквиаффинную подгруппу группы аффинных преоб-

разований, сохраняющих поляритет, и принимая этот поливектор за основной, мы видим, что выражение (8), а следовательно, и (9) являются инвариантами этой подгруппы. Но так как эта подгруппа сохраняет квадратичную форму $a_{ij}z^iz^j$, где z^i — вектор отрезка, то, согласно § 14, она совпадает с группой движений евклидова пространства. Итак, *эквивалентная группа n -мерного пространства, переводящая в себя поляритет второго рода ранга n , есть группа движений евклидова пространства.*

Число параметров группы уменьшается на единицу требованием эквивалентности и равно $\frac{n(n+1)}{2}$.

Свойства группы евклидовых движений различаются в зависимости от сигнатуры абсолютного поляритета в несобственной гиперплоскости. Группа собственно евклидовых движений соответствует эллиптическому абсолюту, а группа движений, отвечающих гиперболическому абсолюту, называется *группой Лоренца*, так как при геометрической интерпретации специального принципа относительности оказалось, что группа преобразований четырехмерного пространственно-временного мира изоморфна этой группе.

§ 26. Сферы в пространстве Евклида E_n

Уравнение гиперсферы евклидова пространства E'_n

$$(x - x_0)^2 = r^2 \quad (1)$$

можно привести к виду

$$x^2 + 2bx + c = 0,$$

или

$$x_ix^i + 2b^ix_i + c = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

или, переходя к однородным координатам $x^1, x^2, \dots, x^n, x^{n+1}$, — к виду

$$x_ix^i + 2b^ix_ix_{n+1} + cx_{n+1}^2 = 0. \quad (3)$$

Составляя уравнение поляры некоторой точки y^α , мы получим

$$y_ix^i + b^i(y_ix_{n+1} + x_iy_{n+1}) + cy_{n+1}x_{n+1} = 0, \quad (4)$$

а если точка y^α несобственная, т. е. $y_{n+1} = 0$, то уравнением ее полярны будет

$$y_i x^i + b_i y^i x_{n+1} = 0. \quad (5)$$

Мы видим, что эта полярная гиперплоскость перпендикулярна направлению вектора несобственной точки y^α , а значит, она пересекает несобственную гиперплоскость по P_{n-2} , которая полярна точке y_α в абсолютном поляритете. Иными словами, *гиперсфера индуцирует в несобственной гиперплоскости поляритет, который совпадает с абсолютным поляритетом пространства.*

Считая это свойство гиперсферы за ее определение, можно говорить не только о действительных и невырождающихся сферах, но и о мнимых сферах и сферах нулевого радиуса, имеющих особую точку. Так, например, уравнение

$$x_i x^i + 1 = 0 \quad (6)$$

выражает мнимую сферу, а уравнение

$$x_i x^i = 0 \quad (7)$$

— сферу нулевого радиуса или конус изотропных направлений.

Поляритет, индуцируемый гиперсферой на всякой P_m , характеризуется тем, что на P_{m-1} , по которой P_m пересекается с несобственной гиперплоскостью, он совпадает с тем, который определяется в этой P_{m-1} абсолютным поляритетом. Таким образом, согласно терминологии, принятой в § 19, *всякая P_m пересекает гиперсферу по сфере $m - 1$ измерения, или S_{m-1} .* Инволюция, определяемая гиперсферой на прямой, произвольна. Поэтому всякую такую инволюцию, иначе говоря — пару действительных мнимо сопряженных или совпадающих точек, следует считать сферой нулевого измерения, или S_0 .

Уравнение

$$\lambda U(x) + \mu V(x) = 0, \quad (8)$$

где

$$U(x) = ax_i x^i + b_i x^i + c, \quad (9)$$

$$V(x) = \bar{a}x_i x^i + \bar{b}_i x^i + \bar{c} \quad (10)$$

— левые части уравнений двух гиперсфер, вообще говоря, выражает гиперсферу. Однако при $\lambda a + \mu \bar{a} = 0$ это есть

уравнение гиперплоскости, которая называется *радикальной гиперплоскостью* двух данных гиперсфер. Можно показать, что обе гиперсферы определяют на своей радикальной гиперплоскости один и тот же поляритет. Особенно просто это доказательство в том случае, если гиперсферы имеют общие точки. Действительно, всякая общая их точка x , очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\bar{a}U(x) - aV(x) = 0,$$

вследствие чего мы можем сказать, что *две гиперсферы пересекаются по тому геометрическому месту точек, по которому каждая из них пересекается с радикальной гиперплоскостью*. Отсюда следует, между прочим, что *две гиперсферы пересекаются по сфере $n - 2$ измерений*.

Пусть две гиперсферы

$$U(x) = 0 \text{ и } V(x) = 0$$

имеют общую точку y ; тогда вследствие того, что

$$U(y) = 0 \text{ и } V(y) = 0,$$

можно представить их уравнения в виде

$$U(x) - U(y) = 0, \quad V(x) - V(y) = 0,$$

или

$$(x_i - y_i)(ax^i + ay^i + 2b^i) = 0,$$

$$(x_i - y_i)(\bar{a}x^i + \bar{a}y^i + 2\bar{b}^i) = 0.$$

Поляризуя эти уравнения, получим уравнения касательных гиперплоскостей обеих сфер в той же точке:

$$(x_i - y_i)(ay^i + b^i) = 0,$$

$$(x_i - y_i)(\bar{a}y^i + \bar{b}^i) = 0,$$

а их нормальные векторы запишутся следующим образом:

$$N_i = ay_i + b_i, \quad \bar{N}_i = \bar{a}y_i + \bar{b}_i.$$

Угол между этими плоскостями определяется по формуле (14,13):

$$\cos \varphi = \frac{N_i \bar{N}^i}{\sqrt{N_p N^p} \sqrt{\bar{N}_q \bar{N}^q}}.$$

Но

$$\begin{aligned} N_i \bar{N}^i &= a \bar{a} y_i y^i + (\bar{a} b_i + \bar{a} b_i) y^i + b_i \bar{b}^i = \\ &= \frac{1}{2} [a (\bar{a} y_i y^i + 2 \bar{b}_i y^i) + \bar{a} (a y_i y^i + 2 b_i y^i)] + b_i \bar{b}^i = \\ &= b_i \bar{b}^i - \frac{1}{2} (a \bar{c} + \bar{a} c). \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$N_i N^i = b_i b^i - ac, \quad \bar{N}_i \bar{N}^i = \bar{b}_i \bar{b}^i - \bar{a} \bar{c},$$

так что

$$\cos \varphi = \frac{2b_i \bar{b}^i - (a \bar{c} + \bar{a} c)}{2 \sqrt{b_p b^p - ac} \sqrt{\bar{b}_q \bar{b}^q - \bar{a} \bar{c}}} . \quad (11)$$

Угол, вычисленный по этой формуле, не зависит от точки y , вследствие чего его называют *углом между гиперсферами*. Та же формула определяет и угол между гиперсферой

$$U = 0$$

и гиперплоскостью

$$2\bar{b}_i x^i + \bar{c} = 0,$$

если в (11) положить $\bar{a} = 0$. Наконец, если и $a = 0$, то формула определяет угол между гиперплоскостями с нормальными векторами b_i и $\bar{b}_i$.

§ 27. Стереографическая проекция

В евклидовом пространстве E_{n+1} дана гиперсфера S_n , точка P , принадлежащая S_n , и гиперплоскость π , не проходящая через P . Предположим, что S_n — гиперсфера единичного радиуса, заданная в декартовых координатах уравнениями

$$\begin{aligned} x_\alpha x^\alpha &= x_i x^i + x_{n+1}^2 - 1 = 0; & \alpha &= 1, \dots, n+2; \\ i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть вектор k с координатами $(0, 0, \dots, 1)$ есть радиус-вектор точки P , а гиперплоскость π выражается уравнением $x_{n+1} = 0$. Поляра внешней точки M пересечет S_n по

действительной сфере S_{n-1} . Поставим вопрос: в какую поверхность X_{n-1} перейдет S_{n-1} при *стереографическом проектировании*, т. е. при проектировании из P на π , и как найти эту поверхность, зная однородные координаты точки M ? Поляра точки $M (m^\alpha)$ выразится уравнением

$$m_i x^i + m_{n+1} x^{n+1} - m_{n+2} = 0, \quad (2)$$

а радиус-вектор точки z^α , которая получится проектированием точки x^α из P на π , будет связан с x^i и k^i следующим образом:

$$x^i = \frac{z^i + \lambda k^i}{1 + \lambda} = \frac{z^i}{1 + \lambda},$$

$$x^{n+1} = \frac{z^{n+1} + \lambda k^{n+1}}{1 + \lambda} = \frac{\lambda}{1 + \lambda}.$$

Сопоставляя с (1), получим

$$z_i z^i + \lambda^2 - (1 + \lambda)^2 = 0,$$

откуда

$$\lambda = \frac{z_i z^i - 1}{2}.$$

С другой стороны, уравнение (2) принимает вид

$$m_i z^i + m_{n+1} \lambda - m_{n+2} (\lambda + 1) = 0,$$

или

$$(m_{n+1} - m_{n+2}) z_i z^i + 2m_i z^i - (m_{n+1} + m_{n+2}) = 0. \quad (3)$$

Сравнивая (3) с уравнением (26,2), мы видим, что при стереографическом проектировании сфера S_{n-1} , расположенная на сфере S_n , переходит в сферу S_{n-1} (при $m_{n+1} \neq m_{n+2}$) или в гиперплоскость пространства E_n (при $m_{n+1} = m_{n+2}$).

Будем искать угол между двумя сферами S_{n-1} в этом пространстве, предположив, что они соответствуют стереографически точкам m^α и n^α пространства E_{n+1} . Применив формулу (26,11), мы получим

$$b_i \bar{b}^i - \frac{1}{2} (a \bar{c} + \bar{a} c) = m_i n^i + m_{n+1} n_{n+1} - m_{n+2} n_{n+2} = m_\alpha n^\alpha$$

и, аналогично,

$$b_i \bar{b}^i - a c = m_\alpha m^\alpha, \quad \bar{b}_i \bar{b}^i - \bar{a} \bar{c} = n_\alpha n^\alpha,$$

откуда

$$\cos \varphi = \frac{m_\alpha n^\alpha}{\sqrt{m_\beta m^\beta} \sqrt{n_\gamma n^\gamma}}, \quad (4)$$

но это есть угол между полярами точек m^α и n^α по отношению к гиперболической метрике, абсолют которой совпадает со сферой S_n .

Итак, *стереографическая проекция со сферы S_n на пространство E_n сопоставляет всякой внешней по отношению к S_n точке гиперсферу или гиперплоскость пространства E_n , причем угол между этими гиперсферами или гиперплоскостями равен углу между полярами соответствующих им точек, измеренному по отношению к проективной метрике с абсолют S_n .*

Стереографическое проектирование устанавливает соответствие между сферой S_n и пространством E_n , однако это соответствие не является взаимно однозначным, так как центр проекций P не соответствует ни одной собственной точке E_n . Чтобы восстановить однозначность, говорят, что точка P соответствует *несобственной точке E_n* . Совокупность всех обыкновенных точек E_n и несобственной точки называют *M -точками E_n* .

Из (3) следует, что сфера S_{n-1} на S_n переходит в гиперплоскость при $m_{n+1} = m_{n+2}$, а в этом случае поляра точки m^α имеет уравнение

$$m_i x^i + m_{n+1} (x^{n+1} - x^{n+2}) = 0,$$

которое удовлетворяется координатами точки с радиусом-вектором k^i , $k^{n+2} = 1$. Отсюда следует, что сферы S_{n-1} переходят при стереографическом проектировании в гиперплоскости E_n тогда и только тогда, когда они проходят через центр проекций. В соответствии с этим считают, что *гиперплоскости E_n проходят через несобственную M -точку*. Наконец, полезно расширить понятие сферы и называть *M -сферой* всякую сферу в обычном смысле слова и всякую плоскость (плоскость есть M -сфера, проходящая через несобственную M -точку).

Если пространство E_{n+1} подвергается проективному преобразованию, переводящему в себя гиперсферу S_n , с которой производится стереографическое проектирование, то ее точки отображаются на другие ее точки, и соот-

ветственно с этим происходит точечное отображение на себя того E_n , на которое происходит стереографическое проектирование. Это отображение обладает следующими свойствами:

1. *М-точки отображаются в М-точки.*

2. *М-сферы отображаются в М-сферы.*

Кроме того, так как преобразование E_{n+1} есть движение проективной метрики с абсолют S_n , то проективная мера сохраняется, следовательно, и в E_n .

3. *Угол между гиперсферами сохраняется.*

Указанное преобразование E_n называется *конформным преобразованием* или *преобразованием Мёбиуса*. Мы подошли к понятию конформного преобразования, расширяя понятие точки и понятие сферы евклидова пространства. Совершенно аналогично можно построить и понятие проективного пространства, дополнив евклидово пространство введением несобственных точек и несобственных плоскостей. Однако мы применили другой подход к определению проективного пространства, задав его отображение на векторное пространство и определив его фундаментальную группу.

В следующем параграфе аналогичным образом будет определено *конформное пространство*, фундаментальная группа которого изоморфна группе конформных преобразований. После этого все предыдущие рассуждения можно будет рассматривать как наводящие, демонстрирующие один из возможных подходов к определению конформного пространства.

§ 28. Конформное пространство

Конформным пространством или пространством M_n называется такое пространство, образом точки которого является произвольная точка абсолюта Q_n пространства K_{n+1} с гиперболической метрикой, а фундаментальная группа есть группа движений этого K_{n+1} .

Принимая тензор абсолютного поляритета за вертор и изображая всякую точку M_n псевдовектором, согласно определению получим для нее

$$x^2 = 0. \quad (1)$$

Гиперсферой или S_{n-1} пространства M_n называется геометрическое место точек, соответствующих точкам

пересечения абсолюта Q_n с некоторой внутренней гиперплоскостью. Вводя вектор гиперплоскости, который будем также называть *вектором гиперсферы* и обозначать, как правило, полужирной греческой буквой, резервируя латинские буквы для векторов точек, мы будем иметь для такого вектора

$$\xi^2 > 0,$$

или, пользуясь нормированием Вейерштрасса,

$$\xi^2 = 1. \quad (2)$$

Условие того, что точка x принадлежит гиперсфере ξ , имеет вид

$$\xi x = 0. \quad (3)$$

Условие $xy = 0$ выполняется для двух точек в том и только в том случае, если эти точки совпадают между собою, так как касательная гиперплоскость к Q_n гиперболической метрики встречает абсолют только в точке прикосновения.

Угол φ между двумя гиперсферами, заданными нормированными векторами ξ и η , определяется по формуле

$$\cos \varphi = \xi \eta, \quad (4)$$

однако φ будет заведомо действительным только тогда, когда гиперплоскости ξ и η пересекаются во внутренней точке Q_n .

При условии

$$\xi \eta = 0 \quad (5)$$

гиперсферы называются *ортогональными*.

Абсолют Q_n , пересекая всякую внутреннюю P_{m+1} по действительной Q_m , определяет в этой P_{m+1} гиперболическую метрику. Место точек M_n , соответствующих точкам этой Q_m , называется *сферой t измерений* или S_t . При всяком преобразовании фундаментальной группы M_n , переводящем P_{m+1} в себя, происходит движение в проективной метрике с абсолютom Q_m , откуда следует, что *всякую S_t можно рассматривать как конформное пространство t измерений*.

Многообразие S_1 называется *кругом*, а многообразие S_0 состоит из двух точек. Рассматривая пару точек как сферу нулевого измерения, мы должны, однако, иметь

в виду, что одну, отдельно взятую, точку имеет смысл рассматривать еще как предельный случай гиперсферы, или как *вырожденную сферу*.

Рассмотрим сферы S_{n-1} и S_m и содержащие их образы плоскостей P_n и P_{m+1} . Эти плоскости пересекаются между собою по некоторой P_m , либо внутренней, либо изотропной, либо внешней по отношению к абсолюту Q_n .

В первом случае P_m пересечется с Q_n по образу некоторой сферы S_{m-1} . Во втором случае P_m будет иметь с Q_n одну общую точку, причем эта точка, как и всякая точка S_{m-1} , будет принадлежать одновременно обоим рассматриваемым сферам: S_{n-1} и S_m . Наконец, в третьем случае P_m не встретит абсолюта. Таким образом, *гиперсфера либо пересекает сферу S_m по сфере S_{m-1} , либо имеет с ней одну общую точку, или касается ее, либо гиперсфера и сфера S_{m-1} не имеют общих точек.*

Если гиперплоскости, содержащие образы гиперсфер, находятся в линейной зависимости, то говорят, что и сами эти *гиперсферы находятся в линейной зависимости между собою*. Связкой t измерений Σ_t (или t -связкой) гиперсфер называют совокупность гиперсфер, находящихся в линейной зависимости с $t + 1$ данными S_{n-1} , независимыми между собою. Очевидно, что гиперплоскости, содержащие образы гиперсфер связки, сами образуют t -связку, а вектор любой гиперсферы связки выражается линейно через векторы ее основных S_{n-1} .

Характеристическое многообразие t -мерной связки гиперплоскостей в пространстве P_{n+1} есть некоторая P_{n-t} , которая может быть внешней, касательной или внутренней по отношению к абсолюту Q_n . В зависимости от этих трех возможностей различают *гиперболические, параболические и эллиптические связки гиперсфер*. В случае эллиптической связки характеристическая P_{n-t} содержит образ сферы S_{n-t-1} , которая принадлежит всем гиперсферам связки и может быть названа ее *характеристической сферой*. Гиперсферы гиперболической связки не имеют общих точек, так как характеристическое многообразие соответствующих гиперплоскостей не пересекает абсолюта.

Базисные гиперплоскости параболической связки всегда можно выбрать так, чтобы среди них была гиперплоскость x , касающаяся абсолюта. Тогда любая гипер-

плоскость параболической связки m измерений представится вектором

$$\xi = \lambda x + \sum_1^m \lambda^k \xi_k$$

при условии $x^2 = 0$. Характеристическая P_{n-m} имеет с абсолютом одну и только одну общую точку x , которая вследствие этого принадлежит всем гиперплоскостям связки. Плоскости ξ_k в числе m определяют связку Π_{m-1} , причем эта связка не может быть гиперболической, так как существует точка x , принадлежащая всем ξ_k , но она не может быть и параболической, потому что в этом случае мы могли бы положить $\xi_1 = y$, т. е. точке, для которой $x\xi_1 = xy = 0$ и которая должна была бы вследствие этого совпасть с x . Итак, плоскости ξ_k определяют эллиптическую связку Π_{m-1} , а соответствующие им гиперсферы имеют характеристическую S_{n-m} . Но эта S_{n-m} имеет с любой S_{n-1} связки ξ только одну общую точку x и, следовательно, касается ее. Таким образом, *все гиперсферы параболической связки m измерений касаются одной сферы S_{n-m} в одной и той же точке*. Следует заметить, что сфера S_{n-m} может быть выбрана не единственным образом, поэтому предпочтительнее говорить, что все гиперсферы параболической связки *касаются одного направления $n - m$ измерений*.

Остается охарактеризовать связку эллиптического типа, что делается с помощью понятия *сопряженных связок*.

Рассмотрим множество гиперсфер, ортогональных всем гиперсферам данной связки:

$$\eta = \sum_1^{m+1} \lambda^k \eta_k.$$

Если смотреть на η_k и η как на векторы полюсов тех гиперплоскостей, которые содержат образы гиперсфер связки, то очевидно, что эти полюсы лежат в некоторой P_m . Вектор ξ гиперсферы, ортогональной гиперсферам данной связки, удовлетворяет условию

$$\xi\eta = 0,$$

а это значит, что полюс, соответствующий этой гиперсфере,

принадлежит P_{n-m} , полярной данной P_m , и

$$\zeta = \sum_1^{n-m+1} \mu^k \zeta_k.$$

Но в таком случае гиперсферы ζ образуют связку Σ_{n-m} , которая называется сопряженной связке Σ_m . Итак, совокупность гиперсфер, ортогональных гиперсферам связки Σ_m , есть связка Σ_{n-m} , сопряженная данной.

Рассматривая η и ζ снова как гиперплоскости, мы видим, что характеристические многообразия обеих связок полярно сопряжены относительно абсолюта. Значит, если одно из них внешнее, то другое внутреннее, и наоборот. Отсюда следует, что эллиптическая связка Σ_m представляет собой совокупность гиперсфер, ортогональных всем гиперсферам некоторой гиперболической связки Σ_{n-m} .

Связка, сопряженная параболической связке с центральной точкой x , есть тоже параболическая связка с тем же центром, так как он в силу (1) сопряжен самому себе. Характеристическое направление $n - m$ измерений первой связки и характеристическое направление $n - (n - m) = m$ измерений называются вполне ортогональными, так как всякая гиперсфера, касающаяся первого из них, ортогональна всякой гиперсфере, касающейся второго.

Перейдем к рассмотрению связок простейшего вида. Связка одного измерения называется пучком и определяется двумя независимыми гиперсферами, каждая из которых может вырождаться в точку. Пусть точка x и сфера ξ определяют пучок

$$\eta = \lambda x + \mu \xi;$$

будем искать такую вторую сферу пучка, которая тоже вырождается в точку. Из условия

$$2\lambda x\xi + \mu^2 \xi^2 = 0$$

точка находится и определяется однозначно по формуле

$$z = \xi^2 x - 2(\xi x)\xi. \quad (6)$$

Правая часть равенства (6) есть линейная вектор-функция x , переводящая в себя абсолют, а следовательно, она определяет некоторое преобразование фундаментальной группы. Это преобразование называется инверсией относительно гиперсферы ξ .

Применяя преобразование (6) к сферам, мы получим соотношение

$$\zeta = \xi^2 \eta - 2(\xi \eta) \xi, \quad (7)$$

которым определяются гиперсферы η и ζ , сопряженные в инверсии относительно гиперсферы ξ .

Из условий (6) и (7) следует, что

$$\zeta z = (\xi^2)^2 \eta x,$$

а значит, *гиперсферы, сопряженные в инверсии, состоят из точек, сопряженных в этой же инверсии.*

Преобразование не теряет смысла и в том случае, когда ξ есть внутренняя точка относительно Q_n . Конечно, в этом случае этой точке не соответствует никакая действительная гиперсфера, однако такое преобразование принято тоже называть *инверсией относительно мнимой гиперсферы* или *эллиптической инверсией* в отличие от *гиперболической инверсии*, рассмотренной выше. Наконец, если ξ — точка конформного пространства, то, вследствие $\xi^2 = 0$, формула (6) относит всякой точке x точку ξ , а инверсия называется в этом случае *параболической*.

Связка двух измерений определяется тремя независимыми гиперсферами, из которых некоторые могут вырождаться в точки. Ее сопряженная связка будет иметь $n - 2$ измерения. Если эта последняя связка эллиптического типа, то ее характеристическое многообразие будет $S_{n-(n-2)-1} = S_1$, т. е. кругом. Таким образом, *если три сферы принадлежат гиперболической связке, то существует единственный круг, ортогональный этим сферам.*

Если одна из трех рассматриваемых гиперсфер вырождается в точку, а две другие проходят вместе через эту точку, то связка заведомо гиперболическая, и *круг, проходящий через данную точку ортогонально двум данным гиперсферам, не пересекающимся в этой точке, определяется однозначно.* Таким же образом можно утверждать, что *круг, проходящий через две данные точки ортогонально некоторой гиперсфере, определяется однозначно.* Последней комбинацией можно воспользоваться, чтобы написать параметрические уравнения круга.

Возьмем некоторую гиперсферу ξ , ортогональную кругу. Она пересечет этот круг по S_0 , т. е. в двух точках x и y . Всякая точка z этого круга выразится тогда в виде

линейной комбинации

$$z = x + \mu y + v\xi,$$

причем $x^2 = y^2 = 0$, а векторы можно пронормировать, положив $\xi^2 = 1$, а $xy = 1$. Но $z^2 = 0$, и, следовательно,

$$2\mu + v^2 = 0,$$

или

$$z = x + v\xi - \frac{v^2}{2} y. \quad (8)$$

Отметим, наконец, что три точки всегда определяют гиперболическую связку, откуда следует, что *круг, проходящий через три точки, определяется однозначно.*

§ 29. Конформная интерпретация пространства K_n

Образ, двойственный гиперплоскости P_{n-1} , есть связка Π_{n-1} , причем точке на P_{n-1} соответствует гиперплоскость в Π_{n-1} , а плоскости P_{n-2} на P_{n-1} — прямая в Π_{n-1} . Однако сама Π_{n-1} есть проективное пространство $n - 1$ измерения, к которому снова может быть применен принцип двойственности. Отсюда следует, что связку Π_{n-1} можно рассматривать как проективное пространство P_{n-1} , точками которого являются прямые Π_{n-1} , а гиперплоскостями — гиперплоскости связки.

Рассмотрим связку Π_n в пространстве P_{n+1} , в котором мы интерпретируем геометрию M_n на гиперповерхности Q_n . Эта гиперповерхность определяет в Π_n поляритет, который будет эллиптическим, гиперболическим или вырожденным в зависимости от того, будет ли точка O — вершина связки — внутренней, внешней или принадлежащей Q_n . Индуцированный таким образом поляритет определяет в связке проективную метрику, в которой точки соответствуют прямым связки. В трех отмеченных выше случаях эта метрика будет эллиптической, гиперболической или евклидовой соответственно. Подгруппа проективных преобразований, сохраняющих Q_n и вершину связки O , будет вызывать такие отображения лучей связки друг на друга, которые соответствуют движениям в пространствах этих проективных метрик.

Каждый луч связки, пересекающий Q_n в некоторой точке A , пересечет ее еще в другой точке A' . Эти точки

являются образами точек, находящихся в инверсии относительно гиперсферы S_{n-1}^0 , соответствующей точке O , а конформные преобразования, соответствующие проективным преобразованиям, сохраняющим Q_n и O , переводят в себя гиперсферу S_{n-1}^0 . Таким образом, подгруппы преобразований фундаментальной группы пространства M_n , сохраняющих некоторую гиперсферу, изоморфны группам движений проективной метрики, причем эта метрика будет эллиптической, гиперболической или евклидовой в зависимости от того, будет ли эта гиперсфера мнимой, действительной или вырождающейся в точку.

Рассматриваемое отображение точек пространства K_n на M_n называется *конформной интерпретацией* этого пространства. Мы видим, что при этой интерпретации точки пространства K_n отображаются в пары точек M_n , находящихся в инверсии относительно некоторой S_{n-1}^0 (абсолютной гиперсферы). Плоскости P_k , принадлежащие K_n , отображаются также в S_k , которые переходят в себя при инверсии относительно S_{n-1}^0 . В частности, если η изображает плоскость, то

$$\lambda\eta = \xi^2\eta - 2(\xi\eta)\xi,$$

где ξ — вектор абсолютной гиперсферы S_{n-1}^0 . Но в таком случае

$$\xi\eta = 0,$$

и, следовательно, сферы, изображающие плоскости K_n , ортогональны абсолютной гиперсфере.

Угол между двумя гиперплоскостями в K_n и угол между изображающими их сферами S_{n-1} в M_n будет, очевидно, одним и тем же, так как он определяется и в том и в другом случае проективной мерой двух гиперплоскостей P_n в K_{n+1} с абсолютом Q_n . Поверхности пространства проективной метрики K_n , изображающиеся произвольными сферами, при конформной интерпретации принято считать сферами K_n . В гиперболическом случае к числу сфер придется отнести эквидистантные и орисферические поверхности геометрии Лобачевского.

§ 30. Дифференцируемое многообразие

Наиболее общий вид отображений пространств на себя, поддающийся исследованию методом дифференциальной геометрии, составляют такие отображения, которые можно назвать дифференцируемыми (или д. отображениями). Их можно определить в любом пространстве, точки которого могут быть определены координатами, т. е., например, во всех пространствах, рассмотренных в предыдущей главе. Отображение двух пространств друг на друга называется *дифференцируемым*, если координаты точки одного из них выражаются через координаты соответствующей точки второго с помощью функций, дифференцируемых достаточное число раз. Учитывая допускаемый порядок дифференцируемости, можно говорить и о порядке дифференцируемого отображения, однако в дальнейшем мы будем предполагать его просто достаточно высоким, т. е. большим порядка тех производных, которые будут встречаться в последующих рассмотрениях.

Все пространства, введенные нами в предыдущей главе, характеризуются возможностью отображения их точек на векторы некоторого векторного пространства. Если соответствующие точки двух таких n -мерных пространств изображаются векторами r и ρ , то дифференцируемое отображение этих пространств друг на друга определится, если эти векторы задать как функции n параметров $u^1, u^2, \dots, u^n$:

$$r = r(u^1, u^2, \dots, u^n), \quad \rho = \rho(u^1, u^2, \dots, u^n), \quad (1)$$

причем одинаковым системам этих параметров отвечают векторы, изображающие точки, соответствующие при данном д. отображении, а функции (1) допускают частные производные по всем параметрам u^i до тех порядков, которые соответствуют порядку отображения. Кроме того,

конечно, нужно потребовать, чтобы задание каждой из точек r или ρ определяло однозначно систему криволинейных параметров.

Дифференцируемое многообразие X_n есть такое топологическое пространство, каждая точка которого обладает окрестностью U , допускающей гомеоморфное отображение h на некоторую область U_0 n -мерного аффинного пространства R_n . При этом различные гомеоморфные отображения $h: U \rightarrow R_n$ должны удовлетворять дополнительному условию, к описанию которого мы и перейдем.

Наличие отображения $h: U \rightarrow U_0 \subset R_n$ позволяет отнести любой точке $x \in U$ n чисел $(u^1, \dots, u^n)$, служащих декартовыми координатами ее образа $h(x)$ в пространстве R_n . Тем самым в области U оказываются определенными так называемые *локальные координаты* x^i , после чего эту область U естественно назвать *локальной картой* пространства X_n . Области U различных локальных карт покрывают все пространство X_n и образуют *атлас* этого пространства. Отмеченное выше дополнительное условие сводится к тому, что если области U и U' двух локальных карт с локальными координатами (u^i) и $(u^{i'})$ пересекаются, то локальные координаты $u^i, u^{i'}$ одной и той же точки из пересечения $U \cap U'$ связаны друг с другом посредством дифференцируемого преобразования

$$u^{i'} = u^{i'}(u^1, \dots, u^n). \quad (a)$$

Так как это преобразование определяет взаимно однозначное соответствие между точками двух областей пространства R_n , то его якобиан должен быть отличен от нуля:

$$\frac{D(u^{1'}, \dots, u^{n'})}{D(u^1, \dots, u^n)} \neq 0. \quad (b)$$

Если области U и U' двух локальных карт совпадают, то соотношения (a) с условием (b) можно истолковать как переход от одних локальных координат к другим в одной и той же области U пространства X_n .

Наиболее простые типы многообразий X_n могут быть представлены с помощью одной-единственной локальной карты, область U которой совпадает с X_n . Однако и в более общих случаях, когда сведение к одной локальной карте невозможно, при рассмотрении многих свойств пространства X_n , определяемых достаточно малой окрестностью

его точки, достаточно пользоваться одной-единственной картой, область которой охватывает эту точку. Все такие свойства составляют содержание локальной дифференциальной геометрии. Так как только эти свойства и будут предметом дальнейших рассмотрений, то всюду в дальнейшем мы не будем делать различия между пространством X_n и его локальной картой. Указанный выше гомеоморфизм $h: U \rightarrow R_n$ для краткости будем называть *дифференцируемым отображением пространства X_n в R_n* и называть *∂ . образами и ∂ . свойствами X_n* такие образы и свойства, которые сохраняются при всяком другом отображении X_n в R'_n , если такое отображение устанавливает дифференцируемое соответствие между областями пространств R_n и R'_n .

Какие же образы и свойства этих образов сохраняются при дифференцируемых отображениях? Прежде всего вспомним, что поверхности m измерений мы всегда определяли так, чтобы вектор, соответствующий точкам этих поверхностей, являлся дифференцируемой функцией некоторых m параметров. Отсюда следует, что *при дифференцируемых отображениях пространство поверхности m измерений переходит в такую же поверхность*. В частности, *кривая*, т. е. дифференцируемое многообразие одного измерения, *переходит в кривую*.

Перейдем теперь к частному случаю дифференцируемого отображения аффинных пространств друг на друга. Будем считать, что r и ρ в формулах (1) суть радиусы-векторы соответственных точек. Рассмотрим две кривые, исходящие из этих точек M и M' :

$$\rho = \rho(t), \quad r = r(t). \quad (2)$$

Предположим, что соответствующие точки этих кривых определяются одинаковыми значениями параметра t , и будем говорить, что векторы

$$a = \frac{dr}{dt} = \partial_i r \frac{du^i}{dt}, \quad a' = \frac{d\rho}{dt} = \partial_i \rho \frac{du^i}{dt}, \quad (3)$$

приложенные к точкам M и M' , соответствуют друг другу при данном дифференцируемом отображении.

Называя *касательным векторным пространством* в точке M совокупность векторов, приложенных в этой точке, мы можем сказать, что *∂ . отображение индуцирует*

соответствие между касательными векторными пространствами в соответствующих точках отображаемых пространств. Посмотрим, каков характер этого соответствия.

Пусть m векторов, приложенных в точке M , находятся в линейной зависимости:

$$\sum_1^m \lambda^k a_k = 0.$$

В таком случае их координаты a_k^i , определенные равенством

$$a_k = a_k^i \partial_i r,$$

находятся в той же линейной зависимости:

$$\sum_1^m \lambda^k a_k^i = 0.$$

Но векторы, соответствующие данным, в пространстве, касательном в точке M' к пространству R'_n , определяются равенством

$$a'_k = \sum_1^m a_k^i \partial_i \rho,$$

откуда

$$\sum_1^m \lambda^k a'_k = 0.$$

Итак, соответствие, индуцируемое дифференцируемым отображением в касательных векторных пространствах соответствующих точек, сохраняет линейную зависимость векторов, т. е. является аффинным.

Как мы видели выше, дифференцируемое многообразие X_n характеризуется тем, что каждая точка его может быть отображена на точку некоторого n -мерного аффинного пространства R_n , причем д. образами и д. свойствами X_n называются такие образы и свойства, которые сохраняются при всяком другом отображении на R'_n , если такое отображение устанавливает между R_n и R'_n дифференцируемое соответствие. Называя пространство R_n пространством отображения X_n , мы сразу приходим к следующим определениям ряда понятий, являющихся д. образами.

Поверхностью m измерений в X_n называется место точек, находящихся во взаимно однозначном соответствии с точками некоторой m -мерной поверхности отображающего пространства. *Кривой X_n* называется место точек, находящихся во взаимно однозначном соответствии с точками кривой отображающего пространства. Очевидно, что поверхность и кривая являются д. образами, так как при всяком д. отображении R_n на R'_n они переходят в поверхность или кривую.

Криволинейными координатами точек X_n назовем криволинейные координаты соответствующих точек в отображающем пространстве. Введение криволинейных координат устанавливает однозначное соответствие между точками X_n и системами n независимых переменных $u^1, u^2, \dots, u^n$. Однако не всякое такое соответствие приводит к определению криволинейных координат. Для того чтобы переменные u^i могли считаться криволинейными координатами, необходимо и достаточно, чтобы функция $r = r(u^1, \dots, u^n)$, где r — радиус-вектор точки отображающего пространства, была дифференцируемой (§ 16). С другой стороны, очевидно, что криволинейные координаты принадлежат к числу д. образов. То же самое можно сказать и о внутренних криволинейных координатах или параметрах $v^1, v^2, \dots, v^m$ любой поверхности, которая по своему определению должна задаваться уравнениями

$$u^i = u^i(v^1, v^2, \dots, v^m), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где u^i — криволинейные координаты точек X_n , принадлежащих поверхности, — определены как дифференцируемые функции параметров.

Кривая X_n , $x^i = x^i(t)$, отображается в параметризованную кривую $r = r(t)$. Величины $t^i = \frac{du^i}{dt}$ определяют вектор, касающийся кривой. Таким образом, мы можем говорить о векторах, приложенных в данной точке X_n . Линейная зависимость m таких векторов выражается условием

$$\sum_1^m \lambda^k a_k^i = 0$$

и является д. свойством.

Возможность говорить о векторах X_n , приложенных в данной точке, позволяет говорить также о тензорах, приложенных в этой же точке. При этом координаты ковектора w_i характеризуются тем, что форма $w_i a^i$ остается инвариантной при преобразовании криволинейных координат, если a^i — координаты вектора. Таким же образом координаты тензора $A_i^p \dots_k^r$ характеризуются инвариантностью полилинейной формы $A_i^p \dots_k^r v^i \dots w^k x_p \dots z_r$, где $v^i, \dots, w^k$ — контравариантные, а $x_p, \dots, z_r$ — ковариантные векторы.

Следует, однако, заметить, что если можно говорить о линейной зависимости и, в частности, о равенстве тензоров, заданных в данной точке X_n , то не имеет смысла говорить о линейной зависимости или равенстве тензоров X_n , заданных в его различных точках. Действительно, если такая зависимость имеет место при некотором отображении на пространство R_n , то она может нарушиться при другом отображении на некоторые R'_n .

§ 31. Аффинная связность вдоль кривой

Пусть γ — кривая, заданная в X_n . Будем считать, что вдоль этой кривой задана *связность*, если дан способ установить соответствие между векторами, приложенными в различных точках этой кривой. Если вектор v^i , приложенный в точке кривой $u^i = u^i(t)$, изменяется в зависимости от t так, что остается соответствующим своему первоначальному значению по отношению к данной связности, то говорят, что он *переносится параллельно вдоль кривой* по отношению к этой связности. Будем предполагать, что *связность дифференцируема*, т. е. что зависимость $v^i = v^i(t)$, выражающая параллельное перенесение, задается дифференцируемыми функциями.

Связность называется *аффинной*, если линейная зависимость векторов сохраняется при их параллельном перенесении. Иными словами, *аффинная связность устанавливает линейное соответствие между пространствами векторов, исходящих из различных точек кривой, по которой происходит перенесение векторов*.

Чтобы найти дифференциальные уравнения, определяющее аффинную связность, возьмем базис a^i в начальной

точке кривой и предположим, что зависимость $a^i_k = a^i_k(t)$ определяет параллельный перенос векторов этого базиса по кривой. Для того чтобы произвольный вектор

$$v^i = \lambda^k a^i_k$$

переносился параллельно по той же кривой, необходимо и достаточно, чтобы все λ^k были постоянными, вследствие чего

$$dv^i = \lambda^k da^i_k.$$

Но

$$\lambda^k = a^k_i v^i,$$

если ковекторы a^k_i определяют базис, взаимный данному, и условие параллельного перенесения вектора v^i по отношению к аффинной связности имеет вид

$$dv^i + \omega^i_k v^k = 0, \quad (1)$$

где

$$\omega^k_i = - a^s_i da^k_s. \quad (2)$$

Систему величин ω^k_i называют *дифференциальным объектом связности* или *формами связности*. Они не зависят от выбора базиса a^i_k , векторы которого переносятся парал-

лельно вдоль кривой. Действительно, если ω^k_i и $\tilde{\omega}^k_i$ соответствуют двум различным базисам, то для всякого вектора v^i , переносимого параллельно, мы должны иметь одновременно

$$dv^i + \omega^i_k v^k \equiv dv^i + \tilde{\omega}^i_k v^k,$$

откуда

$$\omega^i_k = \tilde{\omega}^i_k,$$

так как начальное значение вектора v^i произвольно.

Величины ω_k^i не являются компонентами тензора. В этом можно убедиться, установив закон их преобразования при замене криволинейных координат в X_n . Полагая, как обычно,

$$\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} = A_{i'}^i, \quad \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i} = A_i^{i'},$$

получим для координат векторов базиса

$$a_i^k = A_{i'}^k a_{i'}^k, \quad a_k^i = A_i^i a_k^{i'},$$

$$da_k^i = dA_{i'}^i a_k^{i'} + A_{i'}^i da_k^{i'},$$

откуда

$$\omega_j^i = -a_j^k da_k^i = -A_{j'}^k a_{j'}^k (dA_{i'}^i a_k^{i'} + A_{i'}^i da_k^{i'}),$$

или

$$\omega_j^i = A_{j'}^{i'} A_{i'}^i \omega_{j'}^{i'} - A_{j'}^{i'} dA_{i'}^i. \quad (3)$$

Установив с помощью заданной аффинной связности соответствие между векторами, можно установить соответствие и между ко векторами, приложенными в различных точках кривой. Будем говорить, что ко вектор w_i переносится параллельно вдоль кривой γ , если его след на любом векторе, переносимом параллельно вдоль кривой, остается неизменным. Итак, пусть

$$d(v^i w_i) = dv^i w_i + v^i dw_i = 0;$$

но если вектор v^i переносится параллельно, то

$$dv^i = -\omega_k^i v^k,$$

откуда

$$(dw_i - \omega_i^k w_k) v^i = 0.$$

Так как это условие должно выполняться тождественно по отношению к вектору v^i , то условие параллельного переносения ко вектора вдоль кривой имеет вид

$$dw_i - \omega_i^k w_k = 0. \quad (4)$$

Связность дает возможность сравнивать тензоры любой валентности, заданные в различных точках кривой. Наиболее существенное средство для такого сравнения дает понятие *абсолютного дифференциала*. Чтобы ввести его, будем рассуждать следующим образом: пусть

$$z = a_{ij}^{pq} \dots v^i w^j \dots x_p y_q \dots$$

есть след тензора, координаты которого заданы во всех точках кривой γ , так что

$$a_{ij}^{pq} \dots = a_{ij}^{pq} \dots (t).$$

Будем дифференцировать функцию z , предполагая, что векторные переменные $v^i, w^j, \dots, x_p, y_q, \dots$ переносятся параллельно. При этом предположении мы можем применить формулы (1) и (4) и получим

$$\begin{aligned} dz = & da_{ij}^{pq} \dots v^i w^j \dots x_p y_q \dots + a_{ij}^{pq} \dots dv^i w^j \dots x_p y_q \dots + \\ & + a_{ij}^{pq} \dots v^i dw^j \dots x_p y_q \dots + a_{ij}^{pq} \dots v^i w^j \dots dx_p y_q \dots + \\ & + a_{ij}^{pq} \dots v^i w^j \dots x_p dy_q \dots + \dots, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} dz = & (da_{ij}^{pq} \dots - \omega_i^s a_{sj}^{pq} \dots - \omega_j^s a_{is}^{pq} \dots - \dots \\ & \dots + \omega_s^p a_{ij}^{sq} \dots + \omega_s^q a_{ij}^{ps} \dots + \dots) v^i w^j \dots x_p y_q \dots \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$\begin{aligned} \delta a_{ij}^{pq} \dots = & da_{ij}^{pq} \dots - \omega_i^s a_{sj}^{pq} \dots - \omega_j^s a_{is}^{pq} \dots - \dots \\ & \dots + \omega_s^p a_{ij}^{sq} \dots + \omega_s^q a_{ij}^{ps} \dots + \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

мы видим, что

$$dz = \delta a_{ij}^{pq} \dots v^i w^j \dots x_p y_q \dots$$

Итак, *дифференциал полилинейной функции векторных переменных есть полилинейная функция тех же переменных, если эти переменные переносятся параллельно вдоль кривой*. Всякой полилинейной функции векторных переменных соответствует тензор, и, следовательно, функции dz соответствует тензор. Этот тензор имеет ту же валентность, что и данный тензор $a_{ij}^{pq} \dots$, и его координаты определяются равенствами (5). Тензор $\delta a_{ij}^{pq} \dots$ называется *абсолютным дифференциалом тензора* $a_{ij}^{pq} \dots$. Согласно

предыдущему, можно сформулировать такое определение: *абсолютным дифференциалом тензора называется такой тензор, след которого на векторных переменных равен дифференциалу следа данного тензора на тех же векторных переменных, если эти переменные переносятся параллельно вдоль кривой.*

Отметим два непосредственных следствия введенного определения.

1. *Условие параллельного переноса ко- и контравариантных векторов принимает вид*

$$\delta v^i = 0, \quad \delta w_i = 0, \quad (6)$$

т. е. характеризуется равенством нулю абсолютных дифференциалов этих векторов.

2. *Абсолютный дифференциал единичного тензора равен нулю, или*

$$\delta(\delta_i^j) = 0. \quad (7)$$

Последнее вытекает из того, что при параллельном перенесении векторов

$$d(w_k v^k) = d(\delta_k^s w_s v^k) = 0.$$

Задав связность на кривой $\gamma: u^i = u^i(t)$ пространства X_n , рассмотрим также пространство R_n и будем искать такие его векторы, которые являются функциями t и удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r_i \frac{du^i}{dt}, \\ \frac{dr_i}{dt} &= \frac{\omega_i^k r_k}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где ω_i^k — объект связности на данной кривой γ . Если r, r_i представляют систему частных решений уравнений (8), а R, R_i — соответствующие общие решения, то, вследствие линейного характера уравнений,

$$R_i = \Phi r_i, \quad R = \Phi r + c, \quad (9)$$

где Φ — постоянный аффино́р. Линейная зависимость вида $c^k r_k = 0$, имеющая место при некотором значении параметра t , сохраняется в силу уравнений (8) вдоль всей кривой. Обратно, если взять решение, соответствующее

системе независимых начальных значений r_i , то эта независимость сохранится и при любом значении t . Рассматривая только такие решения, мы можем сказать, что получаем после интегрирования кривую γ_0 , $r = r(t)$, в каждой точке которой задан аффинный репер r_i . Из (9) следует, что эта система реперов, заданных вдоль кривой γ_0 , определяется с точностью до аффинного преобразования пространства R_n .

Будем говорить, что кривая γ_0 получена *развертыванием кривой γ* пространства X_n с заданной связностью на кривую пространства R_n . Используя репер r_i , определяемый в каждой точке кривой γ_0 , мы можем отнести вектору v^i , приложенному в соответствующей точке кривой γ , вектор

$$v = v^k r_k.$$

Таким образом, *всякому вектору, заданному в точке кривой γ , соответствует некоторый вектор пространства R_n , если γ развернута на это пространство*. Дифференцируя вектор v , получим

$$dv = dv^k r_k + v^k dr_k,$$

или

$$dv = (dv^k + \omega_s^k v^s) r_k = \delta v^k r_k. \quad (10)$$

Отсюда следует, что, *если вектор v^i переносится параллельно вдоль кривой γ в X_n , то соответствующий ему вектор в точках кривой γ_0 , на которую развернута данная кривая, остается неизменным*, или, иначе говоря, переносится параллельно в смысле геометрии пространства R_n . Итак, при развертывании факт параллельного переноса сохраняется.

Развернув кривую $u^i = u^i(t)$ пространства X_n на кривую $r = r(t)$ пространства R_n , будем искать зависимость радиуса-вектора точки этого пространства r от криволинейных координат X_n так, чтобы в точках кривой γ выполнялись условия

$$r(u^1, \dots, u^n) = r(t), \quad \partial_i r(u^1, \dots, u^n) = r_i(t).$$

Принимая во внимание, что эта задача, очевидно, имеет бесчисленное множество решений, получаем следующий

результат: если в пространстве X_n задана связность на кривой γ , то его всегда можно отобразить на аффинное пространство R_n так, чтобы при этом кривая этого пространства γ_0 , соответствующая кривой γ , была разверткой кривой γ на R_n .

Будем говорить, что в этом случае пространства X_n и R_n соприкасаются вдоль кривой γ . На основании предыдущего, если пространство X_n соприкасается с пространством R_n вдоль кривой γ , то вектор, переносимый параллельно по этой кривой, соответствует постоянному вектору пространства R_n .

Полученные результаты позволяют дать истолкование понятия абсолютного дифференциала. Тензор A , заданный в точке кривой γ , соответствует тензору A_0 пространства R_n , если их следы на соответствующих векторах одинаковы. Будем дифференцировать след A на векторах, предполагая, что они переносятся параллельно вдоль γ . Полученный дифференциал будет равен дифференциалу следа A_0 на постоянных векторах. Но в этих условиях дифференциал следа A есть след его абсолютного дифференциала, а дифференциал следа A_0 — след его обыкновенного дифференциала.

Значит, при разворачивании кривой γ пространства X_n на кривую γ_0 пространства R_n абсолютный дифференциал тензора A и обыкновенный дифференциал соответствующего ему тензора A_0 соответствуют друг другу.

Этот результат позволяет перенести все свойства обычного дифференцирования тензоров, изложенные в § 9, на дифференцирование абсолютное и сформулировать следующие правила абсолютного дифференцирования:

$$\left. \begin{aligned} 1. \delta(A \pm B) &= \delta A \pm \delta B \text{ для тензоров} \\ &\quad \text{одного и того же типа.} \\ 2. \delta(\lambda A) &= d\lambda A + \lambda \delta A, \quad \text{где } \lambda \text{ — скаляр.} \\ 3. \delta(AB) &= A\delta B + \delta AB \text{ для произведения} \\ &\quad \text{тензоров произвольных валентностей.} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

4. Операции симметрирования, альтернирования и свертывания перестановочны с операцией абсолютного дифференцирования.

Следует заметить, что все эти правила могут быть без большого труда доказаны и непосредственно, если исходить из выражения координат абсолютного дифференциала, определяемого формулами (5).

§ 32. Пространство аффинной связности

Пространство аффинной связности, или A_n , есть такое X_n , на каждой кривой которого задана аффинная связность, причем это задание удовлетворяет еще *условию линейности*, которое мы сформулируем в дальнейшем.

Предварительно введем понятие *регулярного поля* тензоров в X_n . Будем говорить, что нам задано поле тензоров, если каждой точке X_n отнесен тензор, координаты которого являются функциями криволинейных координат этой точки, причем поле является регулярным, если эти функции дифференцируемы по всем криволинейным координатам. Будем говорить также про тензор регулярного поля, что он является *дифференцируемой функцией точки* X_n . Очевидно, поле принадлежит к числу объектов, сохраняющихся при дифференцируемых преобразованиях X_n . В дальнейшем, говоря о тензорных полях в X_n , мы будем всегда подразумевать регулярность, не оговаривая ее особо.

Рассмотрим теперь некоторое векторное поле, заданное в области, содержащей точку M . Векторы этого поля, рассматриваемые в точках всевозможных кривых, выходящих из точки M , образуют последовательности, и если на этих кривых определена связность, то можно вычислить абсолютный дифференциал $\delta v^i = dv^i + \omega_k^i v^k$ векторов этого поля в точке M для каждой из этих кривых.

Условие линейности, о котором мы говорили при определении пространства аффинной связности, состоит в следующем: *для всякой точки M и для всякого векторного поля, заданного в окрестности этой точки, абсолютный дифференциал вектора, принадлежащего этому полю, вычисленный в точке M для любой кривой, проходящей через эту точку, есть линейная функция вектора du^i элементарного смещения по кривой.*

Итак, если аффинная связность на всех кривых определяется аффинной связностью в пространстве X_n , то

для всякого поля v^i и для всякого смещения du^i

$$\delta v^i = v_k^i du^k,$$

где v_k^i зависит только от v^i и от точки. Но

$$\delta v^i = \partial_k v^i du^k + \omega_k^i v^k,$$

вследствие чего

$$\omega_k^i v^k = (v_s^i - \partial_s v^i) du^s.$$

Однако v^k , $d_s v^i$ и v_s^i являются функциями точки, а ω_k^i не зависит от выбора векторного поля v^i , откуда

$$\omega_k^i = \Gamma_{sk}^i du^s, \quad (1)$$

где Γ_{sk}^i может зависеть только от точки. Величины Γ_{sk}^i — функции точки, задание которых определяет аффинную связность в пространстве X_n , — называются *коэффициентами связности*. Говорят также, что они определяют *объект связности*.

Коэффициенты связности не являются компонентами тензора, что следует из закона того преобразования, которое они испытывают при преобразовании координат в X_n . Чтобы вывести этот закон, воспользуемся соотношениями (31,3), характеризующими преобразование величин ω_j^i . Согласно этим соотношениям

$$\omega_j^i = A_j^{j'} A_{i'}^{i'} \omega_{j'}^{i'} - A_j^{j'} dA_{j'}^{i'}.$$

Но

$$\omega_j^i = \Gamma_{kj}^i du^k,$$

$$\omega_{j'}^{i'} = \Gamma_{k'j'}^{i'} du^{k'} = \Gamma_{k'j'}^{i'} A_k^{k'} du^k,$$

$$A_j^{j'} dA_{j'}^{i'} = A_j^{j'} \partial_k A_{j'}^{i'} du^k.$$

Кроме того, $A_j^{j'} A_{j'}^{i'} = \delta_j^i$, откуда

$$A_j^{j'} \partial_k A_{j'}^{i'} = -A_{j'}^{i'} \partial_k A_j^{j'} = -A_{j'}^{i'} A_{kj}^{j'}.$$

Принимая во внимание произвольность вектора du^k , получим окончательно

$$\Gamma_{kj}^i = A_{i'}^{i'} A_j^{j'} A_k^{k'} \Gamma_{k'j'}^{i'} + A_{i'}^{i'} A_{kj}^{j'}. \quad (2)$$

Согласно определению пространства аффинной связности абсолютный дифференциал всякого тензора,

принадлежащего полю этого пространства, имеет вид

$$\delta A_{ij}^{pq} \dots = (\partial_k A_{ij}^{pq} \dots - \Gamma_{ki}^s A_{sj}^{pq} \dots - \Gamma_{kj}^s A_{is}^{pq} \dots - \dots + \Gamma_{ks}^p A_{ij}^{sq} \dots + \Gamma_{ks}^q A_{ij}^{ps} \dots + \dots) du^k.$$

В левой части этого равенства мы имеем тензор, du^k — вектор, следовательно, и выражения, стоящие в скобках, являются компонентами тензора, называемого *тензором ковариантной производной данного тензора* $A_{ij}^{pq} \dots$. Обозначая компоненты тензора ковариантной производной следующим образом:

$$\nabla_k A_{ij}^{pq} \dots = \partial_k A_{ij}^{pq} \dots - \Gamma_{ki}^s A_{sj}^{pq} \dots - \Gamma_{kj}^s A_{is}^{pq} \dots - \dots + \Gamma_{ks}^p A_{ij}^{sq} \dots + \Gamma_{ks}^q A_{ij}^{ps} \dots + \dots, \quad (3)$$

мы будем иметь

$$\delta A_{ij}^{pq} \dots = \nabla_k A_{ij}^{pq} \dots du^k. \quad (4)$$

Итак, пространство аффинной связности характеризуется тем, что полю всякого тензора относится поле его ковариантной производной, так что абсолютный дифференциал данного тензора равен следу ковариантной производной на векторе элементарного смещения. Определение показывает, что при ковариантном дифференцировании число ковариантных валентностей тензора увеличивается на единицу.

Формальные свойства ковариантного дифференцирования непосредственно следуют из свойств абсолютного дифференцирования, если принять во внимание произвольность вектора du^k в левой и правой частях формул (31, 11), предположив, что они применены к тензорам поля в A_n . Так, например, формула

$$\delta (A_{ij}^{pq} \dots + B_{ij}^{pq} \dots) = \delta A_{ij}^{pq} \dots + \delta B_{ij}^{pq} \dots$$

принимает вид

$$\nabla_k (A_{ij}^{pq} \dots + B_{ij}^{pq} \dots) du^k = (\nabla_k A_{ij}^{pq} \dots + \nabla_k B_{ij}^{pq} \dots) du^k,$$

откуда, вследствие произвольности du^k ,

$$\nabla_k (A_{ij}^{pq} \dots + B_{ij}^{pq} \dots) = \nabla_k A_{ij}^{pq} \dots + \nabla_k B_{ij}^{pq} \dots. \quad (5)$$

Аналогично получаются формулы

$$\nabla_k (\lambda A_{ij}^{pq} \dots) = \partial_k \lambda A_{ij}^{pq} \dots + \lambda \nabla_k A_{ij}^{pq} \dots, \quad (6)$$

$$\nabla_k (A_{ij}^{pq} \dots B_{lm}^{rs} \dots) = \nabla_k A_{ij}^{pq} \dots \cdot B_{lm}^{rs} \dots + A_{ij}^{pq} \dots \nabla_k B_{lm}^{rs} \dots \quad (7)$$

и следующее правило: *операции симметрирования, альтернирования и свертывания перестановочны с операцией ковариантного дифференцирования.*

§ 33. Кривизна и кручение

Рассмотренные свойства ковариантных производных устанавливают аналогию между операциями ковариантного и обычного дифференцирования. Однако эта аналогия нарушается при переходе к вопросу о повторном дифференцировании. Так, в отличие от обычных частных производных, ковариантные производные зависят от порядка дифференцирования.

Рассмотрим скалярное поле. Пусть

$$V = V(u^1, \dots, u^n)$$

есть дифференцируемая функция точки X_n . Полный дифференциал этой функции

$$dV = \partial_i V du^i$$

остаётся инвариантным при преобразовании координат и является линейной функцией вектора du^i . Ковектор, соответствующий этой функции, имеет координаты

$$V_i = \partial_i V \quad (1)$$

и называется *градиентом* скалярного поля V .

В общем случае ковектор V_i является градиентом искомого скалярного поля тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0. \quad (2)$$

Предположив теперь, что в X_n задана аффинная связность, возьмем ковариантную производную градиента V_i и проальтернируем ее по обоим нижним индексам. Принимая во внимание, что

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma_{ji}^h V_h,$$

получим

$$\nabla_{[j} V_{i]} = S_{ij}^k V_k, \quad (3)$$

где

$$S_{ij}^k = \Gamma_{[ij]}^k. \quad (4)$$

Так как V_k есть вектор, значения которого в данной точке зависят от выбора скалярного поля, т. е. являются совершенно произвольными, а левая часть равенства есть тензор, то и величины S_{ij}^k суть компоненты тензора, кососимметричного по нижним индексам и зависящего только от выбора аффинной связности. Тензор S_{ij}^k называется *тензором кручения* данного пространства аффинной связности. Формула (3) показывает, что *необходимое и достаточное условие градиентности ковектора V_i состоит в том, что его альтернированная ковариантная производная равна его следу на тензоре кручения пространства.*

Рассмотрим теперь результат повторного ковариантного дифференцирования контравариантного вектора:

$$\begin{aligned} \nabla_r \nabla_s v^i &= \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma_{rm}^i \nabla_s v^m - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i = \partial_{rs}^2 v^i + \partial_r \Gamma_{sk}^i v^k + \\ &+ \Gamma_{sk}^i \partial_r v^k + \Gamma_{rm}^i \partial_s v^m + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{sk}^m v^k - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i. \end{aligned}$$

Альтернирование правой и левой части полученного равенства дает

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} v^i = R_{rsk}{}^i v^k - 2S_{rs}^k \nabla_k v^i, \quad (5)$$

где

$$R_{rsk}{}^i = \partial_r \Gamma_{sk}^i - \partial_s \Gamma_{rk}^i + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{sk}^m - \Gamma_{sm}^i \Gamma_{rk}^m. \quad (6)$$

Так как левая часть и последний член правой части равенства (5) являются тензорами, а v^i — произвольный вектор, то величины $R_{rsk}{}^i$ являются тоже компонентами тензора. Этот тензор носит название тензора кривизны или *тензора Римана — Кристоффеля* пространства аффинной связности.

Кососимметрическая часть второй ковариантной производной любого тензора может быть выражена, как и в случае контравариантного вектора, с помощью тензоров кривизны и кручения. Сначала мы вычислим это выражение для ковектора. Если w_i — ковектор, то след произвольного вектора на этом ковекторе образует

скалярное поле и, вследствие (3),

$$\nabla_{[r}\nabla_{s]}(w_k v^k) = S_{sr}^m \nabla_m(w_k v^k) = S_{sr}^m (\nabla_m w_k v^k + w_k \nabla_m v^k).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \nabla_{[r}\nabla_{s]}(w_k v^k) &= \nabla_{[r}\nabla_{s]}w_k v^k + \nabla_{[s}w_{|k|}\nabla_{r]}v^k + \nabla_{[r}w_{|k|}\nabla_{s]}v^k + \\ &+ w_k \nabla_{[r}\nabla_{s]}v^k = \nabla_{[r}\nabla_{s]}w_k v^k + \frac{1}{2} w_m R_{rsk}{}^m v^k - S_{rs}^p \nabla_p v^k w_k. \end{aligned}$$

Сравнение полученных выражений дает, вследствие произвольности v^i ,

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}w_k = -R_{rsk}{}^m w_m - 2S_{rs}^m \nabla_m w_k. \quad (7)$$

Основываясь на соотношениях, полученных для векторов, можно найти выражение альтернированной производной любого тензора. Пусть, например, это есть тензор A_i^j . Свертывая его с произвольными векторами, мы будем иметь

$$\nabla_{[r}\nabla_{s]}(A_i^j v^i w_j) = S_{sr}^k (\nabla_k A_i^j v^i w_j + A_i^j \nabla_k v^i w_j + A_i^j v^i \nabla_k w_j).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \nabla_{[r}\nabla_{s]}(A_i^j v^i w_j) &= \nabla_{[r}\nabla_{s]}A_i^j v^i w_j + A_i^j \nabla_{[r}\nabla_{s]}v^i w_j + A_i^j v^i \nabla_{[r}\nabla_{s]}w_j + \\ &+ \nabla_{[r}A_{|i|}^j \nabla_{s]}v^i w_j + \nabla_{[s}A_{|i|}^j \nabla_{r]}v^i w_j + \nabla_{[r}A_{|i|}^j \nabla_{s]}w_j v^i + \\ &+ \nabla_{[s}A_{|i|}^j \nabla_{r]}w_j v^i + A_i^j \nabla_{[r}v^i \nabla_{s]}w_j + A_i^j \nabla_{[s}v^i \nabla_{r]}w_j = \\ &= \nabla_{[r}\nabla_{s]}A_i^j v^i w_j + \frac{1}{2} A_m^j (R_{rsi}{}^m v^i w_j - 2S_{rs}^k \nabla_k v^m w_j) - \\ &- \frac{1}{2} A_i^m (R_{rsm}{}^j w_j v^i + 2S_{rs}^k \nabla_k w_m v^i). \end{aligned}$$

Сравнив левые части полученных выражений и принимая во внимание произвольность векторов, окончательно будем иметь

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}A_i^j = R_{rsm}{}^j A_i^m - R_{rsi}{}^m A_m^j - 2S_{rs}^k \nabla_k A_i^j. \quad (*)$$

Для общего случая формула выводится аналогично и имеет вид

$$\begin{aligned} 2\nabla_{[r}\nabla_{s]}A_{ij}^{pq\dots} &= R_{rsm}{}^p A_{ij}^{mq\dots} + R_{rsm}{}^q A_{ij}^{pm\dots} + \dots \\ \dots - R_{rsi}{}^m A_{mj}^{pq\dots} - R_{rsj}{}^m A_{im}^{pq\dots} - \dots - 2S_{rs}^k \nabla_k A_{ij}^{pq\dots}. \end{aligned} \quad (8)$$

Приведенные формулы имеют важное значение для составления инвариантных форм условий интегрируемости дифференциальных уравнений, которые могут быть записаны в виде таких же соотношений между тензорами и их производными. Рассмотрим, например, систему

$$\nabla_k z_{ij} = B_{kij}. \quad (9)$$

Предположим, что тензор B_{kij} задан, а тензор z_{ij} искомый. Система (9) равносильна следующей:

$$\partial_k z_{ij} - \Gamma_{ki}^s z_{sj} - \Gamma_{kj}^s z_{is} = B_{kij},$$

а условие интегрируемости последней мы получим, продифференцировав обе ее части по u^l и проальтернировав по k и l . Но соотношение

$$\partial_l \nabla_k z_{ij} = \partial_l B_{kij}$$

равносильно следующему:

$$\nabla_l \nabla_k z_{ij} = \nabla_l B_{kij};$$

поэтому условия интегрируемости системы (9) имеют вид

$$\nabla_{[l} \nabla_{k]} z_{ij} = \nabla_{[l} B_{k]ij},$$

или, согласно (8),

$$-R_{lki}^s z_{sj} - R_{lkj}^s z_{is} = 2\nabla_{[l} B_{k]ij} + 2S_{lk}^s B_{sij}. \quad (10)$$

Аналогично можно составить условия интегрируемости для уравнений, содержащих в качестве неизвестных тензоры других типов.

§ 34. Преобразование связности

Если между точками двух различных пространств аффинной связности установлено взаимно однозначное и дифференцируемое соответствие, то в них можно ввести такие системы криволинейных координат, чтобы координаты соответствующих точек были одинаковы. Такую систему координат можно назвать *общей* для обоих пространств по отношению к данному соответствию.

Ту же картину соответствия можно представить себе, положив, что в некотором X_n заданы две различные

аффинные связности. Переход от одной из них к другой можно рассматривать при этом как *преобразование связности*, или преобразование закона параллельного перенесения.

Пусть коэффициенты обеих связностей обозначены через Γ_{ij}^k и $\check{\Gamma}_{ij}^k$ соответственно. Ковариантные производные вектора некоторого произвольного поля v^i , вычисленные по отношению к различным связностям, будут иметь вид

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_{km}^i v^m, \quad \check{\nabla}_k v^i = \partial_k v^i + \check{\Gamma}_{km}^i v^m$$

соответственно, а их разность

$$\check{\nabla}_k v^i - \nabla_k v^i = T_{km}^i v^m, \quad (1)$$

где

$$T_{km}^i = \check{\Gamma}_{km}^i - \Gamma_{km}^i. \quad (2)$$

Так как разность ковариантных производных есть тензор, а v^m — произвольный вектор, то система величин T_{km}^i , равных разностям соответствующих коэффициентов двух различных связностей, заданных в одном X_n , есть тензор. Мы будем называть его *тензором аффинной деформации*.

Важно отметить, что всякая система величин $\check{\Gamma}_{ij}^k$, связанная с коэффициентами связности Γ_{ij}^k формулами (2), где T_{ij}^k — тензор, определяет связность. Чтобы убедиться в этом, применим к Γ_{ij}^k формулы преобразования координат. Представив Γ_{ij}^k в виде $\check{\Gamma}_{ij}^k - T_{ij}^k$, мы получим

$$\check{\Gamma}_{ij}^k - T_{ij}^k = A_{k'}^k A_i^{i'} A_j^{j'} (\check{\Gamma}_{i'j'}^{k'} - T_{i'j'}^{k'}) + A_{k'}^k A_{ij}^{k'}.$$

Но T_{ij}^k есть тензор, следовательно,

$$T_{ij}^k = A_{k'}^k A_i^{i'} A_j^{j'} T_{i'j'}^{k'},$$

и мы видим, что величины $\check{\Gamma}_{ij}^k$ преобразуются по закону (32,2) и, таким образом, определяют связность, не зависящую от выбора системы координат.

Отмеченный результат имеет многочисленные приложения. Рассмотрим, например, систему величин

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\Gamma_{ij}^k + \lambda \Gamma_{ij}^k}{1 + \lambda}. \quad (3)$$

Если Γ_{ij}^k и Γ_{ij}^k суть коэффициенты связностей, то и Γ_{ij}^k определяют связность. Действительно,

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{\lambda}{1 + \lambda} (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k),$$

где вторые слагаемые представляют тензор. В частности,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ij}^k}{2} \quad (4)$$

определяют связность, которая называется *средней* по отношению к связностям Γ_{ij}^k и Γ_{ij}^k .

Из соотношения

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k + 2S_{ji}^k, \quad (5)$$

где S_{ij}^k — тензор кручения, следует, что величины $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ определяют связность. Связности $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ и Γ_{ij}^k называются *взаимными*. Используя коэффициенты взаимных связностей, мы можем построить также среднюю связность взаимной пары

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ji}^k}{2}. \quad (6)$$

Выясним закон изменения тензора кривизны при преобразовании связности. Подставляя выражение $\check{\Gamma}_{ij}^k$ в формулу (33,6), мы получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \check{R}_{rsm}^i &= \frac{1}{2} R_{rsm}^i + \partial_{[r} T_{s]m}^i + \Gamma_{[r|p|}^i T_{s]m}^p + \\ &+ T_{[r|p|}^i \Gamma_{s]m}^p + T_{[r|p|}^i T_{s]m}^p, \end{aligned}$$

но

$$\begin{aligned} \partial_r T_{sm}^i &= \nabla_r T_{sm}^i - \Gamma_{rp}^i T_{sm}^p + \Gamma_{rs}^p T_{pm}^i + \Gamma_{rm}^p T_{sp}^i = [rs] \\ &= \nabla_r T_{sm}^i - \Gamma_{rp}^i T_{sm}^p + S_{rs}^p T_{pm}^i - \Gamma_{sm}^p T_{rp}^i [rs] \end{aligned}$$

(символ $[rs]$ справа от равенства означает альтернирование обеих его частей по r, s). Отсюда

$$\check{R}_{rsm}^i = R_{rsm}^i + \nabla_r T_{sm}^i - \nabla_s T_{rm}^i + T_{rp}^i T_{sm}^p - T_{sp}^i T_{rm}^p + 2S_{rs}^p T_{pm}^i. \quad (7)$$

§ 35. Пространство без кручения

Особое значение в приложениях играют такие пространства аффинной связности, кручение которых равно нулю. Коэффициенты связности таких пространств удовлетворяют условию

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad (1)$$

или, иначе говоря, связность совпадает со своей взаимной.

Ряд свойств пространств без кручения связан с существованием особых координатных систем, которые называются *нормальными*. Рассмотрим некоторую точку O с координатами u^i , и пусть в некоторой произвольной системе координат значения коэффициентов связности в этой точке равны Γ_{ij}^k . Введем теперь новые координаты, полагая

$$u^{i'} = \delta_k^{i'} \left\{ (u^k - u^k) + \frac{1}{2} \Gamma_{pq}^k (u^p - u^p) (u^q - u^q) \right\},$$

где $\delta_i^{i'}$ — символ Кронекера. Это преобразование дифференцируемо, а частные производные от новых координат по старым определяются следующим образом:

$$A_i^{i'} = \delta_i^{i'} + \delta_k^{i'} \Gamma_{ip}^k (u^p - u^p), \quad A_{ij}^{i'} = \delta_k^{i'} \Gamma_{ij}^k.$$

Якобиан преобразования $\text{Det} \| A_i^{i'} \|$ равен единице в точке O и отличен от нуля в ее окрестности, вследствие чего рассматриваемое преобразование принадлежит к числу допустимых. Примем теперь во внимание, что в точке O рассматриваемые производные выражаются так:

$$A_i^{i'} = \delta_i^{i'}, \quad A_{ij}^{i'} = \delta_k^{i'} \Gamma_{ij}^k,$$

и вычислим значение коэффициентов связности в этой точке по отношению к новой системе координат. Согласно

формуле (32,2)

$$\overset{0}{\Gamma}_{jk}^i = \delta_j^{j'} \delta_k^{k'} \delta_{i'}^i \overset{0}{\Gamma}_{j'k'}^{i'} + \delta_{i'}^i \delta_l^{l'} \overset{0}{\Gamma}_{kj}^{l'},$$

откуда

$$\overset{0}{\Gamma}_{k'j'}^{i'} = 0.$$

Итак, для каждой точки O пространства аффинной связности без кручения можно определить такую систему криволинейных координат, в которой значения всех коэффициентов связности обращаются в нуль в этой точке. Эти координаты называются нормальными в точке O .

Используем нормальные координаты для того, чтобы получить основные тождества, связывающие компоненты тензора кривизны в пространстве без кручения. В нормальных координатах значения компонент этого тензора в точке O имеют следующий простой вид:

$$R_{rsk}^i = \partial_r \Gamma_{sk}^i - \partial_s \Gamma_{rk}^i, \quad (2)$$

причем в общем случае нет никаких оснований предполагать, что производные от компонент связности тоже равны нулю. Используя это выражение, мы можем без труда проверить следующие соотношения, которые ввиду своего инвариантного характера сохраняются и в любой другой системе координат, хотя бы она и не была нормальной:

$$R_{(rs)k}^i = 0, \quad (3)$$

$$R_{[rsk]}^i = \frac{1}{3} (R_{rsk}^i + R_{skr}^i + R_{krs}^i) = 0. \quad (4)$$

Отмеченные тождества являются алгебраическими, но, наряду с ними, существует еще одно весьма важное дифференциальное тождество, которое обычно называют *тождеством Бианки — Падова*. Чтобы получить его, примем во внимание, что в нормальных координатах в точке O

$$\nabla_t R_{rsk}^i = \partial_t R_{rsk}^i = \partial_{tr}^2 \Gamma_{sk}^i - \partial_{ts}^2 \Gamma_{rk}^i,$$

так как при дифференцировании остальных членов, состоящих из произведений коэффициентов связности, один из множителей всегда будет обращаться в нуль. Теперь непосредственной проверкой легко убедиться в справед-

ЛИВОСТИ СООТНОШЕНИЯ

$$\nabla_{[t} R_{rs]k}^i = \frac{1}{3} (\nabla_t R_{rsk}^i + \nabla_r R_{stk}^i + \nabla_s R_{trk}^i) = 0. \quad (5)$$

Пользуясь соотношением (34,7), принимая во внимание, что для средней связности двух взаимных связностей $\overset{c}{\Gamma}_{ij}^k$ выполняются тождества (4) и (5), и замечая, что

$$\Gamma_{ij}^k = \overset{c}{\Gamma}_{ij}^k + S_{ij}^k,$$

мы без труда получим аналогичные тождества для любой связности с кручением. Эти тождества будут иметь следующий вид:

$$R_{[rsk]}^i = 2\nabla_{[r} S_{sk]}^i - 4S_{[rs}^p S_{k]p}^i, \quad (4')$$

$$\nabla_{[t} R_{rs]k}^i = 2S_{[t}^m R_{s]mk}^i. \quad (5')$$

Покажем теперь, что коэффициенты связности без кручения можно выразить через компоненты тензоров и их производные. Рассмотрим некоторый симметричный невырожденный тензор a_{ij} и обратный ему тензор $\tilde{a}^{ij}$. Пусть, кроме того, известна ковариантная производная тензора a_{ij} :

$$\nabla_k a_{ij} = a_{kij}.$$

Переставляя индексы циклически, получим три равенства:

$$\partial_k a_{ij} - \Gamma_{ki}^m a_{mj} - \Gamma_{kj}^m a_{mi} = \nabla_k a_{ij},$$

$$\partial_i a_{jk} - \Gamma_{ij}^m a_{mk} - \Gamma_{ik}^m a_{jm} = \nabla_i a_{jk},$$

$$\partial_j a_{ki} - \Gamma_{jk}^m a_{mi} - \Gamma_{ji}^m a_{km} = \nabla_j a_{ki}.$$

Вычитание двух последних из первого дает

$$2\Gamma_{ij}^m a_{mk} = \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij} - (a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij})$$

и, после свертывания с $\tilde{a}^{kr}$,

$$\Gamma_{ij}^r = \left\{ \begin{matrix} r \\ ij \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2} \tilde{a}^{rk} (a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}), \quad (6)$$

где

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ ij \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \tilde{a}^{rk} (\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij}). \quad (7)$$

Последнее выражение носит название *скобки* или *символа Кристоффеля тензора* a_{ij} . Таким образом, симметричные коэффициенты связности могут быть выражены через скобки Кристоффеля некоторого невырожденного тензора a_{ij} и его ковариантную производную.

Из того, что разность между коэффициентами связности и скобками Кристоффеля является тензором, следует, что скобки Кристоффеля сами будут коэффициентами некоторой связности без кручения, которую можно назвать *собственной связностью* тензора a_{ij} . Мы вернемся еще к этой связности ниже (§ 43).

В заключение рассмотрим такое преобразование связности, которое оставляет ее симметричной. Соответствующий тензор аффинной деформации удовлетворяет условию

$$T_{ij}^k = T_{ji}^k, \quad (8)$$

а формула (34,7) преобразования тензора кривизны упрощается и принимает вид

$$\check{R}_{rsk}^i = R_{rsk}^i + 2\nabla_{[r}T_{s]k}^i + 2T_{m[r}^iT_{s]k}^m. \quad (9)$$

Но, очевидно, этому же соотношению можно придать вид

$$R_{rsk}^i = \check{R}_{rsk}^i - 2\check{\nabla}_{[r}T_{s]k}^i + 2T_{m[r}^iT_{s]k}^m,$$

что при сравнении с предыдущим дает

$$\check{R}_{rsk}^i = R_{rsk}^i + 2\overset{c}{\nabla}_{[r}T_{s]k}^i, \quad (10)$$

где $\overset{c}{\nabla}$ — символ дифференцирования в средней связности, т. е. в связности с коэффициентами

$$\overset{c}{\Gamma}_{ij}^k = \frac{\Gamma_{ij}^k + \check{\Gamma}_{ij}^k}{2}. \quad (11)$$

§ 36. Пространство нулевой кривизны

Пространство нулевой кривизны характеризуется обращением в нуль тензора Римана:

$$R_{rsk}^i = 0. \quad (1)$$

Чтобы найти свойства этого пространства, вернемся к общему случаю и поставим вопрос о разыскании *поля абсолютно параллельных векторов*, т. е. такого поля, вектор которого переносится параллельно по любой кривой пространства A_n . Условие этого: $\delta v^i = 0$ должно удовлетворяться тождественно по отношению к выбору вектора v^i и, следовательно, равносильно обращению в нуль ковариантной производной вектора, т. е. имеет вид

$$\nabla_k v^i = 0. \quad (2)$$

Составляя условие интегрируемости и пользуясь формулой (33,5), мы получим алгебраическое соотношение

$$R_{rsk}^i v^k = 0. \quad (3)$$

Если уравнение (2) имеет n линейно независимых решений a^i_k , то всякий вектор $v^i = c^k a^i_k$ удовлетворяет ему при $c^k = \text{const}$. Условие (3) должно удовлетворяться тождественно по отношению к выбору вектора v^i , откуда следует, что тензор кривизны равен нулю. Обратно, если это условие выполнено, то уравнение (2) вполне интегрируемо, т. е. существует его решение, соответствующее любым начальным данным, и, следовательно, существуют n линейно независимых решений a^i_k .

Все предыдущие рассуждения можно повторить, ставя вопрос о существовании полей абсолютно параллельных ковекторов, и мы приходим к следующему результату: *пространства нулевой кривизны характеризуются существованием n независимых полей абсолютно параллельных векторов или ковекторов.*

Произвол в выборе начальных условий при решении уравнения (2) в пространстве нулевой кривизны позволяет, кроме того, утверждать, что любой вектор, заданный в некоторой точке пространства, может быть включен в некоторое поле абсолютно параллельных векторов и это поле определяется единственным образом. Действительно, если этот вектор в начальной точке равен $v^i = c^k a^i_k$, то вектор поля определится как $v^i = c^k a^i_k$, где a^i_k — неза-

висимые решения (2), а c^k — постоянные. Связность нулевой кривизны вполне определяется заданием n независимых полей a^i абсолютно параллельных векторов.

Ее коэффициенты можно вычислить, имея в виду, что

$$\partial_s a^i_k = - \Gamma_{sm}^i a^m_k,$$

откуда

$$\Gamma_{sm}^i = - a_m^k \partial_s a^i_k, \quad (4)$$

если ковекторы a_m^k удовлетворяют условиям

$$a_m^k a^i_k = \delta_m^i, \quad (5)$$

т. е. образуют базис, взаимный с базисом a^i_k .

Рассмотрим теперь пространство, которое одновременно является пространством нулевой кривизны и нулевого кручения, и возьмем в этом пространстве n независимых полей абсолютно параллельных ковекторов x_i^α , $i = 1, \dots, n$; $\alpha = 1, 2, \dots, n$. Из уравнений $\nabla^k x_i^\alpha = 0$, которым удовлетворяют эти ковекторы, следует $\nabla_{[k} x_{i]}^\alpha = 0$, а так как кручение равно нулю, то $x_i^\alpha = \partial_i x^\alpha$, т. е. x_i^α являются градиентами n функций x^α . Отобразим рассматриваемое пространство на аффинное, считая x^α декартовыми координатами последнего, т. е. полагая, что радиус-вектор его точки $r = a_\alpha x^\alpha$, где $a_\alpha = \text{const}$. Координаты u^i исходного пространства можно теперь считать криволинейными координатами в R_n , причем

$$r_i = a_\alpha \partial_i x^\alpha,$$

а вследствие условия $\nabla_k x_i^\alpha = 0$

$$\partial_k r_i - \Gamma_{ki}^m r_m = a_\alpha \nabla_k x_i^\alpha = 0. \quad (6)$$

Всякому вектору A_n соответствует вектор $v = v^i r_i$, причем

$$dv = \delta v^i r_i + v^i \delta (a_\alpha x_i^\alpha).$$

Но $\delta x_i^\alpha = 0$, поэтому

$$dv = \delta v^i r_i.$$

Вектор ν^i переносится параллельно в R_n тогда и только тогда, когда $\delta\nu^i = 0$, т. е. $d\nu = 0$, или $\nu = \text{const}$.

Итак, пространство нулевой кривизны и нулевого кручения X_n характеризуется тем, что его можно отобразить на аффинное пространство R_n так, что вектору, переносимому параллельно в данном пространстве X_n , соответствует неизменный вектор аффинного пространства R_n .

Но с точки зрения дифференцируемых отображений в тех областях, в которых это отображение однозначно и регулярно, два пространства с одинаковыми законами параллельного перенесения тождественны между собою. Таким образом, пространство нулевой кривизны и нулевого кручения есть аффинное пространство. Относя аффинное пространство к декартовым координатам, мы будем иметь

$$r_i = a_i = \text{const},$$

откуда

$$\nabla_k r_i = -\Gamma_{ki}^s r_s = 0,$$

или

$$\Gamma_{ij}^s = 0.$$

Итак, декартовы координаты аффинного пространства являются нормальными для каждой его точки.

§ 37. Смешанное дифференцирование

В этом параграфе мы отметим одно из обобщений понятия ковариантной производной, которым нам в дальнейшем придется пользоваться.

Рассматривая полилинейную функцию $z = f(x, y, \dots, \xi, \eta, \dots)$, мы можем предполагать, что векторные и ковекторные переменные $x, y, \dots, \xi, \eta, \dots$ принадлежат различным векторным пространствам B_n и B'_m , где m и n , вообще говоря, тоже различны. Будем говорить, что такой функции соответствует промежуточный, или связующий, тензор. Введем в каждом из пространств B_n и B'_m свой координатный репер: b_a ($a = 1, \dots, n$) в пространстве B_n и c_i ($i = 1, \dots, m$) в пространстве B'_m . Координатами про-

межуточного тензора будем называть следы этого тензора на координатных векторах пространств, которым принадлежат соответствующие переменные, т. е. величины

$$A_{a\dots i\dots} = f(b_a, \dots, c_i, \dots).$$

Условимся при этом заранее о выборе обозначений для индексов, представляющих номера координатных векторов в том или ином пространстве, полагая, например, что пространству B_n соответствуют индексы, обозначаемые буквами $a, b, c, \dots$, а пространству B'_m — индексы, обозначаемые буквами $i, j, k, \dots$.

Действия над промежуточными тензорами определяются так же, как и обычно, но при этом нужно учитывать, что сложение двух таких тензоров возможно только в том случае, если у них на соответствующих местах стоят индексы, относящиеся к одному пространству. Свертывание, симметрирование и альтернирование возможно только по индексам, относящимся к одному пространству.

Предположим теперь, что нам даны два пространства: X_m и X_n , причем $m \leq n$, а между их точками установлено дифференцируемое соответствие, которое однозначно, если $m < n$, и взаимно однозначно при $m = n$. В пространстве X_m мы можем рассматривать поле промежуточных тензоров $A_{a\dots i\dots}$, отвечающих полилинейной функции, зависящей от векторных переменных, принадлежащих обоим пространствам. В силу однозначного соответствия это поле можно считать принадлежащим также и пространству X_n .

Если в каждом из пространств задана аффинная связность, то, взяв линию в X_m , мы можем вычислить дифференциал функции $z = A_{a\dots i\dots} v^a \dots w^i \dots$, предполагая, что векторы $v^a, \dots$ переносятся параллельно в связности пространства X_m , а векторы $w^i, \dots$ — в связности пространства X_n . Пусть условия этих переносов имеют вид

$$dv^a = -\omega_b^a v^b, \dots, \quad dw^i = \omega_j^i w^j, \dots;$$

в таком случае искомый дифференциал

$$dz = (dA_{a\dots i\dots} - \omega_a^b A_{b\dots i\dots} - \dots \\ \dots - \omega_i^j A_{a\dots j\dots} - \dots) v^a \dots w^i \dots$$

является полилинейной функцией векторов $v^a, \dots, w^i, \dots$,

т. е. соответствует промежуточному тензору

$$\delta A_{a\dots i\dots} = dA_{a\dots i\dots} - \omega_a^b A_{b\dots i\dots} - \dots - \omega_i^j A_{a\dots j\dots} - \dots, \quad (1)$$

называемому *смешанным абсолютным дифференциалом*, выражение которого составляется с помощью коэффициентов различных связностей, заданных независимо друг от друга в пространствах X_m и X_n .

Введем криволинейные координаты x^a в X_n и u^i в X_m . Полагая $x^a = x^a(u^i)$, введем обозначения $x_i^a = \partial_i x^a$. Если формы связности выражаются так:

$$\omega_a^b = \Gamma_{ca}^b dx^c, \quad \omega_i^j = G_{ki}^j du^k,$$

то

$$\delta A_{a\dots i\dots} = \nabla_k A_{a\dots i\dots} du^k$$

и тензор

$$\nabla_k A_{a\dots i\dots} = \partial_k A_{a\dots i\dots} - \Gamma_{ca}^b x_k^c A_{b\dots i\dots} - G_{ki}^j A_{a\dots j\dots} \quad (2)$$

называется *смешанной ковариантной производной* тензора $A_{a\dots i}$. Заметим, что при смешанном ковариантном дифференцировании к данному тензору присоединяется ковариантный индекс, принадлежащий пространству X_m , т. е. пространству, число измерений которого не больше числа измерений пространства X_n .

Строение смешанной производной показывает, что для нее сохраняются правила ковариантного дифференцирования. Чтобы подчеркнуть смешанный характер дифференцирования, иногда вместо символа ∇ употребляют символ D .

Введенные таким образом понятия мы применим сначала к одному весьма частному случаю. Предположим, что пространства X_m и X_n имеют одинаковое число измерений и связности обоих пространств совпадают, но криволинейные координаты одного из них x^a отличны от криволинейных координат другого u^i . В таком случае соответствующие векторы и ковекторы обоих пространств связаны соотношениями

$$v^a = x_i^a v^i \quad w_i = x_i^a w_a,$$

а след двух векторов друг на друге

$$z = v^a w_a = x_i^a v^i w_a.$$

Рассматривая z как функцию v^i и w_a , мы видим, что x_i^a являются промежуточными координатами единичного тензора.

Если векторы v^i и w_a переносятся параллельно, то их след остается неизменным, $dz = 0$, и, значит, $\delta x_i^a = 0$; а так как это условие должно выполняться тождественно относительно выбора du^i , то оно равносильно равенству нулю абсолютной производной x_i^a , так что

$$\nabla_k x_i^a = \partial_k x_i^a + \Gamma_{cb}^a x_k^c x_i^b - \Gamma_{ki}^j x_j^a = 0. \quad (3)$$

Легко видеть, что эта формула только обозначениями отличается от формулы (32,2), выражающей закон преобразования коэффициентов связности при переходе к новой системе координат. Та же самая формула принимает вид соотношения (36,6), если x^a — декартовы, а u^i — криволинейные координаты точки аффинного пространства.

§ 38. Индуцированная связность

Поверхность X_m в пространстве X_n задается уравнением

$$x^a = x^a(u^i) \quad (a, b, c, d = 1, \dots, n; \quad i, j, k, l = 1, \dots, m). \quad (1)$$

Касательный вектор кривой $u^i = u^i(t)$, принадлежащей этой поверхности, имеет вид

$$v^a = \frac{dx^a}{dt} = \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \frac{du^i}{dt} = x_i^a v^i. \quad (2)$$

Соотношение $v^a = x_i^a v^i$ относит всякому вектору v^i , принадлежащему X_m , вектор v^a пространства X_n , и эти векторы удобно обозначать одинаковыми буквами, различая их по характеру индекса.

Если во внешнем пространстве X_n задана связность и вектор v^a переносится параллельно по кривой γ , расположенной на X_m , то он, вообще говоря, перестает принадлежать X_m , если даже и принадлежал ей в начальный момент своего перенесения. С этой точки зрения связность в X_n не определяет непосредственно связности на поверхностях, погруженных в это X_n . Однако путем некоторых дополнительных соглашений связность в X_m

все же может быть получена. Эти соглашения обобщают тот метод, которым Леви-Чивита впервые построил частный вид неевклидовой связности. Напомним это построение.

С каждой точкой M поверхности X_2 евклидова пространства связано направление нормальной прямой, которая заведомо не лежит в плоскости, касающейся X_2 в точке M . Перенесем вектор v , принадлежащий X_2 в точке M , в бесконечно близкую точку M' в смысле того перенесения, которое существует во внешнем пространстве E_3 , т. е. построим в M' вектор, равный вектору v , и спроектируем его параллельно нормали в точке M' на касательную плоскость в этой точке. Будем говорить, что полученный путем такого проектирования и принадлежащий X_2 вектор v' получен из v *путем параллельного переноса в смысле Леви-Чивита, или внутреннего параллельного переноса на поверхности X_2* . Можно показать, что дифференциальное условие внутреннего параллельного перенесения вектора по некоторой кривой, расположенной на X_2 , имеет вид

$$dv = \lambda n,$$

где v — переносимый вектор, а n — нормальный вектор поверхности.

Обобщая это определение, можно рассматривать поверхность X_m в евклидовом пространстве E_n и определить внутреннее параллельное перенесение векторов, принадлежащих поверхности, условием

$$dv = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda^k n_k, \quad (*)$$

где n_k ($k = 1, \dots, n - m$) — независимые между собою нормальные векторы поверхности.

Условие параллельного перенесения (*) определяет на поверхности аффинную связность специального типа, и впоследствии мы еще вернемся к ней.

Теперь обратимся опять к общему случаю поверхности X_m в пространстве A_n произвольной аффинной связности и рассмотрим такое построение, которое обобщает построение Леви-Чивита и позволяет задать связность на X_m . Существенная разница с метрическим пространством состоит в том, что в общем случае с точкой M поверхности X_m

не связано направление многообразия, нормального касательной плоскости к X_m .

Чтобы определить внутреннюю связность, следует задать направления, выполняющие роль нормальных. Объясним подробнее это замечание. Мы можем отобразить A_n на аффинное пространство R_n , и тогда X_m перейдет в некоторую поверхность X_m m измерений этого пространства. Будем называть X_m *оснащенной*, если с каждой точкой X_m связана некоторая плоскость R_{n-m} , проходящая через эту точку, но не имеющая с X_m общих направлений. Это пространство R_{n-m} называют *псевдонормальным*. Оснащение можно задать с помощью векторов n ($s = 1, \dots, n - m$), независимых между собою и лежащих в псевдонормальном R_{n-m} . Если X_m задано уравнениями

$$x^a = x^a(u^i), \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m, \\ a = 1, \dots, n, \end{matrix}$$

$$x_i^a = \frac{\partial x^a}{\partial u^i},$$

то условие отсутствия общих направлений у псевдонормального R_{n-m} и X_m состоит в том, что никакой из векторов x_i^a не принадлежит R_{n-m} . Но так как векторы x_i^a независимы, то это условие сводится также к тому, что все n векторов x_i^a , n^a образуют базис в пространстве X_n .

Для дальнейшего существенно заметить, что оснащение позволяет установить однозначное соответствие между тензорами X_m и тензорами X_n . Для контравариантных векторов это соответствие уже установлено в начале этого параграфа и независимо от оснащения. Ковектор w_a пространства X_n будем считать соответствующим ковектору w_i оснащенной X_m , если для всякого вектора v , принадлежащего X_m ,

$$w_a v^a = w_i v^i, \quad w_a n^a = 0 \quad (s = 1, \dots, n - m). \quad (3)$$

Эти равенства определяют следы w_a на всех независимых между собой направлениях, и, значит, w_a вполне определено.

Определив v^a и w_a , соответствующие любым v^i и w_i , принадлежащим оснащению X_m , мы можем теперь определить и любой тензор внешнего пространства, соответствующий тензору X_m . Имея в виду это соответствие, будем называть X_m -компонентой тензора пространства X_n тензор, соответствующий ему в X_m .

Теперь перейдем к связности на X_m . Будем говорить, что на некоторой кривой, принадлежащей оснащенной X_m , задана связность, индуцированная связностью во внешнем X_n , если абсолютный дифференциал вектора, принадлежащего X_m и переносящегося параллельно в индуцированной связности, принадлежит в каждой точке соответствующему псевдонормальному многообразию. Таким образом, условие параллельного переноса в индуцированной связности имеет вид

$$\delta v^a = \sum_1^{n-m} \lambda^s n^a_s, \quad (4)$$

где δ — символ абсолютного дифференцирования в связности внешнего пространства, а n^a_s — независимые векторы, определяющие псевдонормальные R_{n-m} . Связность, индуцированная вдоль кривой X_m , будет аффинной. Действительно, если $v^a = aw^a + bt^a$, где $a, b = \text{const}$, то $\delta v^a = a\delta w^a + b\delta t^a$. Таким образом, если векторы δw^a и δt^a лежат в псевдонормальном R_{n-m} , то δv^a тоже лежит в нем, а это значит, что линейная комбинация векторов сохраняется при их параллельном перенесении.

Покажем теперь, что индуцированная связность будет аффинной и во всем X_m . Для этого будем искать абсолютный дифференциал ковариантного вектора, принадлежащего X_m . По определению

$$\delta w_i v^i \equiv d(w_i v^i),$$

если v^i — вектор, переносящийся параллельно. Но

$$\begin{aligned} d(w_i v^i) &= d(w_a v^a) = \delta w_a v^a + w_a \delta v^a = \\ &= \delta w_a v^a + w_a \sum_1^s \lambda^s n^a_s = \delta w_a v^a = \delta w_a x^a_i v^i. \end{aligned}$$

Так как это равенство должно иметь место при любых начальных значениях v^i , то

$$\delta w_i = \delta w_a x^a_i.$$

Однако связность в X_n аффинная, и, следовательно, абсолютный дифференциал δw_a является линейной функцией дифференциалов $dx^a = x^a_k du^k$, а это значит, что δw_i будет линейной функцией du^k , и, таким образом, индуцированная связность действительно будет аффинной в X_m .

Остается показать, что индуцированная связность на оснащенной поверхности в X_n определяется всегда и притом единственным образом. Используем для этого операцию смешанного дифференцирования и перепишем условие (4) в виде

$$\delta x^a_i v^i + x^a_i \delta v^i = \sum_s \lambda^a_i n^s;$$

но $\delta v^i = 0$, и условие должно иметь место при любых начальных значениях вектора v^i , поэтому

$$\delta x^a_i = \nabla_k x^a_i du^k = \sum_s \lambda^a_i n^s.$$

Вследствие произвольности du^k , $\lambda^a_i = \sum_s b^a_{ik} du^k$, и мы приходим к соотношениям

$$\nabla_k x^a_i = \sum_1^{n-m} \sum_s b^a_{ik} n^s, \quad (5)$$

которые могут быть представлены в виде

$$\partial_k x^a_i - G^l_{ki} x^a_l + \Gamma^a_{cb} x^c_k x^b_i = \sum_1^{n-m} \sum_s b^a_{ik} n^s, \quad (6)$$

где Γ^a_{cb} и G^l_{ki} — коэффициенты связности X_n и X_m соответственно.

Введем в рассмотрение репер, взаимный естественному подвижному реперу, образованному векторами x^a_i и n^a_s .

Ковекторы этого взаимного репера n_a, x^j_a вполне определены следующими условиями:

$$\underset{s}{n_a} \underset{s}{n^a} = \delta_s^i, \quad \underset{s}{n_a} \underset{s}{x^a_i} = 0, \quad \underset{s}{x^i_a} \underset{s}{n^a} = 0, \quad \underset{s}{x^a_i} \underset{s}{x^j_a} = \delta^j_i. \quad (7)$$

Свертывание (6) с x^j_a дает

$$G^j_{ki} = \partial_k x^a_i x^j_a + \Gamma^a_{cb} x^c_k x^b_i x^j_a, \quad (8)$$

и, следовательно, индуцированное перенесение определяется однозначно, если дано оснащение, позволяющее строить векторы x_a^j .

Альтернирование правой и левой частей (8) дает соотношение между кручениями внешнего пространства Σ_{ab}^c и индуцированной связности S_{ij}^k :

$$S_{ij}^k = x_i^a x_j^b x_c^k \Sigma_{ab}^c, \quad (9)$$

позволяющее прийти к следующему заключению: *связность, индуцированная на поверхностях пространства без кручения, не имеет кручения.*

Согласно этой теореме связность, индуцированная на оснащенных поверхностях X_m аффинного пространства R_n , тоже будет иметь кручение, равное нулю.

Г. Ф. Лаптев впервые строго доказал следующую теорему: *всякая m -мерная геометрия аффинной связности без кручения может быть индуцирована на некоторой m -мерной оснащенной поверхности аффинного пространства R_n , где*

$$n \geq \frac{m^2 + 2m - 1}{2}.$$

Рассматривая кривую как частный случай поверхности, мы будем считать ее оснащенной, если зададим в каждой ее точке псевдонормальную R_{n-1} , которая не содержит касательного направления кривой. Принимая по-прежнему условие индуцированного параллельного переноса для касательного вектора v^i кривой в виде (4):

$$\delta v^a = \sum_1^{n-1} \lambda_{ s}^a n^s, \quad (10)$$

мы будем искать параметр s , удовлетворяющий условию

$$\frac{dx^a}{ds} = v^a, \quad (11)$$

и назовем его *каноническим параметром оснащенной кривой.*

§ 39. Геодезические линии

Геодезической линией пространства аффинной связности называется такая линия, касательный вектор которой переносится вдоль нее параллельно.

Если $u^i = u^i(t)$ — уравнение этой линии, а v^i — касательный вектор, переносимый параллельно, то

$$\frac{du^i}{dt} = \lambda v^i.$$

Дифференцируя, получим

$$\frac{\delta}{dt} \left(\frac{du^i}{dt} \right) = \frac{d\lambda}{dt} v^i,$$

или

$$\frac{\delta}{dt} \left(\frac{du^i}{dt} \right) = \mu \frac{du^i}{dt}. \quad (1)$$

Можно также ввести новый параметр $s = s(t)$, после чего уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\delta}{ds} \left(\frac{du^i}{ds} \right) \frac{ds}{dt} = \left(\mu - \frac{d^2s}{dt^2} \frac{dt}{ds} \right) \frac{du^i}{ds}.$$

Выбирая s так, чтобы $\frac{d^2s}{dt^2} = \mu \frac{ds}{dt}$, мы перейдем к каноническому параметру геодезической линии, а ее уравнение примет вид

$$\frac{\delta}{ds} \left(\frac{du^i}{ds} \right) = 0, \quad (2)$$

так что вектор производной $\frac{du^i}{ds}$ по каноническому параметру переносится параллельно вдоль геодезической.

Легко видеть, что канонический параметр определяется не однозначно, а с точностью до подстановки $s \rightarrow as + b$, где a и b — постоянные.

При разворачивании любой линии пространства A_n на R_n соприкасающаяся плоскость этой линии определяется векторами $\frac{du^i}{dt}$, $\frac{\delta}{dt} \left(\frac{du^i}{dt} \right)$. Уравнение (1) показывает, что соприкасающаяся плоскость геодезической линии неопределенна, и, следовательно, геодезическая линия есть такая линия A_n , которая переходит в прямую при разворачивании на R_n . В частности, геодезическими линиями R_n следует считать его прямые линии.

Переписав уравнение (2) в развернутом виде:

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} = - \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds}, \quad (3)$$

и предполагая, что Γ_{jk}^i удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование решения системы, мы можем утверждать, что *через каждую точку A_n по каждому направлению проходит одна и только одна геодезическая линия.*

Обратимся теперь к рассмотрению геодезических линий индуцированной связности на оснащенной X_m . Пусть в обозначениях предыдущего параграфа n^a ($a = 1, \dots, n - m$) — независимые векторы псевдонормальной R_{n-m} , а s — канонический параметр геодезической в индуцированной связности. В таком случае дифференциальные уравнения этой геодезической имеют вид

$$\frac{\delta}{ds} \left(\frac{du^a}{ds} \right) = \sum_1^{n-m} \lambda_s^s n_s^a. \quad (4)$$

Эти уравнения могут иметь место либо при $\lambda^s = 0$, либо при таких λ^s , среди которых есть отличные от нуля. В первом случае геодезическая внутренней связности X_m , есть вместе с тем геодезическая пространства A_n . Во втором случае вектор $\frac{\delta}{ds} \left(\frac{du^i}{ds} \right)$, который определяет прямую, принадлежащую соприкасающейся плоскости геодезической, принадлежит псевдонормальной R_{n-m} . Принимая во внимание, что в первом случае любая плоскость, касающаяся геодезической, может быть принята за ее соприкасающуюся плоскость, мы приходим к следующей общей формулировке: *для того чтобы линия оснащенной X_m была геодезической в индуцированной на этой X_m связности, необходимо и достаточно, чтобы ее соприкасающаяся плоскость и псевдонормальная R_{m-n} имели общую прямую.*

Отмечая рассмотренный нами первый случай, укажем также, что геодезическая линия внешнего пространства, принадлежащая некоторой X_m , будет геодезической линией во всякой связности, индуцированной на этой X_m .

В заключение скажем несколько слов о возможных обобщениях понятия пространств аффинной связности, которых мы не сможем коснуться подробнее в нашем дальнейшем изложении.

Определяя аффинную связность в пространстве, мы предполагали, что на каждой кривой этого пространства

задана вполне определенная связность. Предположим теперь, что связность вдоль кривой определяется только после того, как вдоль этой кривой задана некоторая последовательность направлений, исходящих из ее точек; если такая связность определена для каждой кривой и для каждой последовательности направлений, то говорят, что она определена *в пространстве линейных элементов*. Путем надлежащей специализации из такой связности общего вида получается *связность пространств Финслера*, рассмотрение которых интересно в том отношении, что оно позволяет геометризировать общую вариационную задачу, экстремали которой всегда можно считать геодезическими линиями некоторого пространства Финслера.

Второе обобщение возникает на следующем пути. В каждой точке X_n задается некоторая плоскость R_m ($m < n$), и направления векторов, принадлежащих этой плоскости, называются *допустимыми*. Кривая γ называется *допустимой*, если она касается в каждой своей точке допустимого направления, принадлежащего этой точке. Пространство называется *неголономным пространством аффинной связности*, если такая связность задана вдоль каждой допустимой кривой и устанавливает соответствие между допустимыми векторами, заданными в ее различных точках, а абсолютный дифференциал является линейной функцией элементарного смещения допустимого направления. При надлежащей специализации можно получить такую неголономную связность, которая дает геометрическую картину механики систем с неголономными связями.

ГЛАВА IV

СПЕЦИАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 40. Полусимметрическая связность

Если вектор w^i , заданный вдоль кривой A_n , коллинеарен вектору ν^i , переносимому параллельно вдоль этой кривой, то говорят, что *направление вектора w^i переносится параллельно*.

Дифференцируя соотношение $w^i = \lambda \nu^i$ и принимая во внимание, что $\delta \nu^i = 0$, мы получим условие

$$\delta w^i = \mu w^i. \quad (1)$$

Таким образом, вектор, направление которого переносится параллельно, характеризуется тем, что его абсолютный дифференциал коллинеарен ему самому.

Будем говорить, что два пространства A_n и $\check{A}_n$, отображенных друг на друга, имеют *общую псевдосвязность*, если направления соответствующих векторов переносятся параллельно в обоих пространствах.

Чтобы найти условие существования общей псевдосвязности, примем во внимание, что каждый раз, как для вектора w^i выполняется условие (1), для него же выполняется и условие

$$\check{\delta} w^i = \check{\mu} w^i,$$

где δ и $\check{\delta}$ — знаки абсолютного дифференцирования в связностях A_n и $\check{A}_n$ соответственно. Вычитая, получим

$$T_{kr}^i du^k w^r = \nu w^i, \quad (*)$$

где

$$T_{kr}^i = \check{\Gamma}_{kr}^i - \Gamma_{kr}^i$$

есть тензор соответствующей аффинной деформации.

Чтобы исключить коэффициент ν , умножим обе части (*) на w^j и проальтернируем. Полученное условие

$$w^{[j} T_{kr}^{i]} w^r du^k = 0$$

должно выполняться тождественно по отношению к выбору w^i и du^k и, значит, равносильно следующему (см. (5,9)):

$$T_{k(r}^{[i} \delta_{l]}^{j]} = 0, \quad \begin{matrix} (*) \\ (*) \end{matrix}$$

или, в развернутом виде,

$$T_{kr}^i \delta_l^j - T_{kr}^j \delta_l^i + T_{kl}^i \delta_r^j - T_{kl}^j \delta_r^i = 0.$$

Свертывая по индексам j и l , получим

$$n T_{kr}^i - T_{kl}^l \delta_r^i = 0,$$

а значит, тензор деформации имеет структуру

$$T_{kr}^i = q_k \delta_r^i. \quad (2)$$

Подстановка в $\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$ обращает его в тождество, и, следовательно, для того чтобы два пространства аффинной связности имели общую псевдосвязность, необходимо и достаточно, чтобы при некотором их отображении друг на друга тензор аффинной деформации имел вид (2).

Если некоторое A_n имеет общую псевдосвязность с $\check{A}_n$, которое не имеет кручения, то A_n называется *полусимметрическим*. В этом случае

$$\check{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + q_i \delta_j^k,$$

а тензор кручения полусимметрической связности

$$S_{ij}^k = q_{[j} \delta_{i]}^k, \quad (3)$$

где q_i — некоторый ковектор.

Согласно (3)

$$q_i = \frac{2}{n-1} S_{ki}^k,$$

т. е. тензор деформации однозначно определяется заданной полусимметрической связностью. Следовательно, *связность без кручения, на которую отображается полусимметрическая связность с сохранением псевдосвязности, определяется однозначно.*

§ 41. Эквиаффинная связность

Пространство аффинной связности без кручения называется *эквиаффинным*, если оно допускает существование объема, сохраняющегося при параллельном перенесении векторов, причем под объемом следует, как и в § 13, понимать выражение

$$V = e_{i_1 i_2 \dots i_n} v_1^{i_1} v_2^{i_2} \dots v_n^{i_n}, \quad (1)$$

где $e_{i_1 \dots i_n}$ — некоторый n -вектор, или *основной n -вектор пространства*.

По определению $dV = 0$, если векторы $v_k^{i_k}$ переносятся параллельно, откуда непосредственно следует, что

$$\delta e_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0,$$

причем это равенство должно выполняться независимо от выбора du^k и, следовательно, равносильно условию

$$\nabla_k e_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0. \quad (2)$$

Итак, *эквиаффинная связность характеризуется существованием основного n -вектора, ковариантная производная которого равна нулю*.

Если мы введем n -вектор, взаимный основному, т. е. связанный с ним условиями

$$e^{i_1 i_2 \dots i_n} e_{j_1 j_2 \dots j_n} = n! \delta_{[j_1 \dots j_n]}^{i_1 \dots i_n}, \quad (3)$$

и продифференцируем его, то получим условие

$$\nabla_k e^{i_1 i_2 \dots i_n} = 0, \quad (4)$$

которое равносильно (2).

Условие (2) может быть также переписано в виде системы уравнений

$$\partial_k e_{i_1 i_2 \dots i_n} - \Gamma_{k i_1}^s e_{s i_2 \dots i_n} - \dots - \Gamma_{k i_n}^s e_{i_1 i_2 \dots s} = 0.$$

Легко видеть, что все уравнения этой системы, соответствующие хотя бы двум одинаковым индексам i_p и i_q , удовлетворяются тождественно. Остается рассмотреть уравнения, соответствующие различным значениям индексов. Но благодаря косой симметрии n -вектора все они равносильны следующему:

$$\partial_k e_{12 \dots n} - \Gamma_{k 1}^s e_{s 2 \dots n} - \dots - \Gamma_{k n}^s e_{12 \dots s} = 0.$$

Введя существенную компоненту основного n -вектора, или основную плотность $e = e_{12\dots n}$, и отбрасывая члены, равные нулю, можно получить второй вид условия, характеризующего эквиаффинную связность:

$$\Gamma_{ks}^s = \partial_k \ln e. \quad (5)$$

Итак, коэффициенты эквиаффинной связности характеризуются тем, что сумма Γ_{ks}^s есть градиент, причем потенциал этого градиента равен логарифму основной плотности пространства. Уравнение (5) показывает, что основная плотность, а с ней и основной n -вектор определяются по коэффициентам эквиаффинной связности не однозначно, но с точностью до постоянного множителя.

Рассматривая тензор

$$R_{ij} = R_{kij}^k, \quad (6)$$

который называется тензором Риччи, мы видим, что его координаты

$$R_{ij} = \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_i \Gamma_{kj}^k + \Gamma_{kl}^k \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{ki}^l \Gamma_{lj}^k \quad (7)$$

будут симметричны в том и только в том случае, если связность эквиаффинна, ибо эта симметрия, очевидно, является необходимым и достаточным условием того, чтобы существовала плотность, удовлетворяющая условию (5). Итак, эквиаффинная связность характеризуется симметрией тензора Риччи:

$$R_{ij} = R_{ji}. \quad (8)$$

Пользуясь тождеством (35,4), мы получим

$$R_{rsk}^k = R_{rs} - R_{sr}, \quad (9)$$

вследствие чего условие

$$R_{rsk}^k = 0 \quad (10)$$

тоже характеризует эквиаффинную связность.

§ 42. Метрическое пространство

Пространство аффинной связности без кручения называется метрическим, если во всех пространствах направлений, исходящих из одной точки, задан основной поляритет, сохраняющийся при параллельном перенесении направлений.

Основной поляритет может быть задан с помощью симметричного дважды ковариантного тензора g_{ij} , причем полярная сопряженность направлений v^i и w^i относительно этого поляритета выразится условием

$$g_{ij}v^i w^j = 0, \quad (1)$$

которое должно оставаться выполняющимся при параллельном перенесении направлений, т. е. когда $\delta v^i = 0$ и $\delta w^i = 0$. Дифференцируя левую часть (1) при этих предположениях, получим уравнение

$$\delta g_{ij}v^i w^j = 0,$$

которое должно быть следствием (1), т. е. удовлетворяется для любых значений v^i и w^j , удовлетворяющих (1). Таким образом, тензор δg_{ij} определяет тот же поляритет, что и тензор g_{ij} ; поэтому

$$\delta g_{ij} = \mu g_{ij}; \quad (2)$$

последняя зависимость имеет место тождественно по отношению к выбору элементарного смещения du^k .

Так как левая часть является линейной функцией du^k , то, следовательно, это будет иметь место и для правой части, так что можно положить

$$\mu = 2\omega_k du^k,$$

где ω_k — ковектор.

Освобождаясь от произвольного du^k в обеих частях (2), мы приходим к условию

$$\nabla_k g_{ij} = 2\omega_k g_{ij}, \quad (3)$$

характеризующему метрическую связность с тензором основного поляритета, или *основным тензором* g_{ij} и *дополнительным вектором* ω_k .

Таким образом, для полной характеристики поляритета достаточно задать псевдотензор или тензор λg_{ij} , где λ — неопределенный скалярный множитель, который можно считать произвольной дифференцируемой функцией точки. Вводя новый основной тензор

$$\check{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij} \quad (4)$$

и производя дифференцирование, получим

$$\nabla_k \check{g}_{ij} = 2\lambda \partial_k \lambda g_{ij} + 2\lambda^2 \omega_k g_{ij},$$

или

$$\nabla_k \check{g}_{ij} = 2(\omega_k + \partial_k \lambda) \check{g}_{ij}.$$

Итак, при перенормировании (4) основного тензора метрического пространства дополнительный вектор преобразуется следующим образом:

$$\check{\omega}_k = \omega_k + \partial_k \ln \lambda. \quad (5)$$

Свобода выбора множителя при g_{ij} не мешает определить проективную метрику, или *угол между двумя направлениями* метрического пространства, по формуле

$$\cos \frac{\varphi}{c} = \frac{g_{ij} v^i w^j}{\sqrt{g_{pq} v^p v^q} \sqrt{g_{rs} w^r w^s}}, \quad (6)$$

где c — масштабная константа.

Так как поляритет g_{ij} сохраняется при параллельном переносе направлений, то и угол между двумя направлениями, переносимыми параллельно, сохраняется. Так как, с другой стороны, задание проективной метрики определяет основной поляритет, то приходим к следующему положению: *метрическая связность есть такая связность без кручения, в пространстве которой можно определить угол между двумя направлениями по формуле (6), причем этот угол сохраняется при параллельном переносе этих направлений.*

Если основной поляритет не вырождается, т. е. существует тензор g^{ij} , обратный основному и связанный с ним условиями

$$g^{ir} g_{rj} = \delta_j^i, \quad (7)$$

то метрическое пространство называется также *пространством Вейля* или W_n .

Дифференцируя условие (7), получим

$$\nabla_k g^{ir} g_{rj} + 2\omega_k g^{ir} g_{rj} = 0,$$

откуда следует, что тензор, обратный основному, удовлетворяет уравнению

$$\nabla_k g^{ij} = -2\omega_k g^{ij}, \quad (8)$$

равносильному уравнению (3). Сравнение (3) и (8) приводит к полезному для дальнейшего соотношению

$$\nabla_r (g_{ij} g^{kl}) = 0. \quad (9)$$

В случае геометрии Вейля связность вполне определяется заданием основного и дополнительного тензоров. Действительно, так как основной тензор не вырождается, то можно применить формулу (35,6), которая принимает для данного случая вид

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} - (\omega_i \delta_j^k + \omega_j \delta_i^k - \omega_r g^{rk} g_{ij}), \quad (10)$$

где $\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}$ есть символ Кристоффеля формы, соответствующей основному тензору.

Рассмотрим многообразие X_m , вложенное в W_n . невырожденная метрика, определяемая тензором g_{ab} , $a, b = 1, \dots, n$, в каждой точке W_n позволяет найти совокупность всех направлений, нормальных X_m , т. е. ортогональных всем направлениям, принадлежащим X_m в этой точке. Нормальные направления принадлежат плоскости $n - m$ измерений, которую называют *нормальной данному X_m* .

Естественным или *метрическим* оснащением X_m называется оснащение с помощью нормального R_{n-m} . Чтобы оснащение было метрическим, необходимо и достаточно, чтобы векторы, определяющие R_{n-m} , удовлетворяли условиям

$$n^a x_i^b g_{ab} = 0,$$

$a, b = 1, \dots, n$; $i, j = 1, \dots, m$; $s = 1, \dots, n - m$, вследствие которых они нормальны любому направлению $v^a = x_i^a v^i$, принадлежащему X_m .

Поляритет направлений внешнего пространства определяет в каждой точке X_m поляритет для принадлежащих ей направлений. Согласно условию

$$g_{ab} v^a w^b = g_{ab} x_i^a x_j^b v^i w^j = 0,$$

тензор этого индуцированного в X_m поляритета есть

$$g_{ij} = x_i^a x_j^b g_{ab}. \quad (11)$$

Рассмотрим, наконец, связность, индуцированную в X_m ее естественным оснащением. Чтобы охарактеризовать эту связность, примем во внимание, что

$$\nabla_k g_{ij} = \nabla_k x_i^a x_j^b g_{ab} + x_i^a \nabla_k x_j^b g_{ab} + x_i^a x_j^b x_k^c \nabla_c g_{ab},$$

но вследствие (11) и (38,5)

$$\nabla_k g_{ij} = \sum_s \dot{b}_{ki} n^a x_j^b g_{ab} + \sum_s \dot{b}_{kj} n^b x_i^a g_{ab} + 2x_i^a x_j^b x_k^c \omega_c g_{ab} = 2\omega_k g_{ij},$$

так что внутренняя связность, индуцированная на X_m ее естественным оснащением в пространстве W_n , есть связность Вейля, причем основной и дополнительный тензоры этой связности совпадают с X_m -компонентами соответствующих тензоров W_n .

Для всякой кривой W_n находится естественное оснащение, если ее касательный вектор t^a не удовлетворяет условию

$$g_{ab} t^a t^b = 0,$$

т. е. если она не является изотропной. Действительно, для неизотропной кривой многообразие R_{n-1} , нормальное направлению t^a , не содержит этого вектора и, следовательно, может рассматриваться как оснащающее. Согласно общей теории натурального оснащению кривой будет соответствовать ее каноническая параметризация, причем соответствующий натуральный параметр кривой определяется условием

$$\frac{du^a}{ds} = t^a, \quad (12)$$

если δt^a лежит в нормальном R_{n-1} , т. е. удовлетворяет условию

$$g_{ab} t^a \delta t^b = 0 \quad (13)$$

и определяется с точностью до преобразования $s \rightarrow as + b$, где a и b — постоянные.

Если кривая задана, то метрический тензор в ее точках может быть пронормирован так, чтобы имело место равенство

$$g_{ab} t^a t^b = \pm 1, \quad (14)$$

где t^a — натуральный касательный вектор. Дифференцируя это условие в направлении кривой и принимая во внимание (2) и (13), получим условие

$$\delta g_{ab} = 0, \quad (15)$$

которое характеризует натуральное нормирование.

Заметим, что вследствие существования постоянного множителя a , остающегося произвольным при выборе натурального параметра, натуральное нормирование определяется тоже с точностью до этого множителя.

В § 31 мы рассмотрели операцию разворачивания кривой пространства аффинной связности на аффинное пространство. В случае кривой пространства W_n эта операция может быть специализирована. Дифференциальные уравнения, определяющие разворачивание кривой, имеют вид

$$dr_i = \Gamma_{ki}^s r_s du^k, \quad dr = r_i du^i, \quad i, k, s = 1, \dots, n. \quad (16)$$

Введем в R_n евклидову метрику, определяя тензор этой метрики так, чтобы в начальной точке развернутой кривой имели место равенства

$$\gamma_{ij} = r_i r_j = g_{ij},$$

где g_{ij} — основной тензор W_n , нормированный натурально. Но тензор метрики в E_n удовлетворяет системе уравнений

$$d\gamma_{ij} = (\Gamma_{ki}^s \gamma_{sj} + \Gamma_{kj}^s \gamma_{is}) du^k,$$

следующих из (16,9), а для g_{ij} мы имеем из (16)

$$dg_{ij} = (\Gamma_{ki}^s g_{sj} + \Gamma_{kj}^s g_{si}) du^k.$$

Таким образом, тензор γ_{ij} евклидовой метрики, введенной нами в E_n , и нормированный основной тензор g_{ij} удовлетворяют одной и той же системе дифференциальных уравнений и их начальные значения совпадают, откуда следует, что $\gamma_{ij} = g_{ij}$ во всех точках разворачиваемой кривой.

Будем называть разворачивание, удовлетворяющее этим условиям, *метрическим*. Так как метрическое разворачивание определяется выбором начальных значений векторов r_i и выбором постоянного множителя a при нормировании g_{ij} , то оно не является однозначным. Однако скалярные произведения $r_i r_j$ в начальной точке заданы, поэтому свобода выбора самих векторов приводит к тому, что развернутая кривая определяется с точностью до движения в евклидовом пространстве E_n , а выбор постоянного множителя a равносильно возможности подобного преобразования этой кривой. Во всяком случае, метрическое разворачивание кривой W_n на евклидово E_n характеризуется тем,

что углы между направлениями, исходящими из точек кривой W_n , равны углам между соответствующими направлениями в пространстве E_n , а натуральный параметр можно выбрать так, чтобы он совпадал с длиной дуги.

В заключение составим условие интегрируемости основных уравнений (3), характеризующих метрическое пространство.

Дифференцируя, альтернируя и применяя уравнение (33,10), получим

$$R_{lki}^s g_{sj} + R_{lkj}^s g_{is} = -4\nabla_{[l}\omega_{k]}g_{ij}. \quad (17)$$

В случае пространства Вейля левая и правая части могут быть свернуты с тензором g^{ij} , обратным метрическому, что дает соотношение

$$R_{lks}^s = -2n\nabla_{[l}\omega_{k]}, \quad (18)$$

которое показывает, что ротор дополнительного вектора $\nabla_{[l}\omega_{k]}$ не зависит от нормирования основного тензора.

§ 43. Пространство Римана

Пространство Вейля называется *римановым* или V_n , если оно является эквиаффинным.

Так как эквиаффинное пространство характеризуется равенством (41,10)

$$R_{lks}^s = 0,$$

а в W_n имеет место условие (42,18), то для V_n имеем

$$\nabla_{[l}\omega_{k]} = 0. \quad (1)$$

Итак, для того чтобы W_n было римановым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнительный вектор был градиентом.

Перенормирование основного тензора W_n приводит к изменению дополнительного вектора, которое выражается уравнениями (42,5), так что

$$\check{\omega}_k = \omega_k + \partial_k \ln \lambda.$$

В случае V_n можно выбрать нормирующий множитель λ так, чтобы выполнялись условия

$$\check{\omega}_k = \partial_k \ln \lambda$$

и

$$\nabla_k g_{ij} = 0, \quad (2)$$

Таким образом, в пространстве V_n можно ввести такое *натуральное нормирование основного тензора*, при котором дополнительный вектор равен нулю.

Следует заметить, что натуральное нормирование определяется с точностью до постоянного множителя.

В дальнейшем, говоря об основном тензоре V_n , мы всегда будем предполагать, что он пронормирован натурально.

Из (42,8) следует, что тензор g^{ij} , обратный основному тензору V_n , тоже удовлетворяет уравнениям

$$\nabla_k g^{ij} = 0. \quad (3)$$

Свойства основного тензора V_n , выражаемые уравнениями (2) и (3), позволяют с удобством использовать его для перебрасывания индексов. Согласно указанным уравнениям

$$\nabla_k A_{ij} = \nabla_k (g_{is} A^s_{.j}) = g_{is} \nabla^k A^s_{.j},$$

и, таким образом, операция перебрасывания индексов, производимая с помощью основного тензора V_n , перестановочна с операцией ковариантного дифференцирования.

С помощью основного тензора V_n определяется *скалярное произведение* векторов

$$vw = g_{ij} v^i w^j \quad (4)$$

и *норма* вектора

$$v^2 = g_{ij} v^i v^j. \quad (5)$$

Скалярное произведение и норма сохраняются при параллельном перенесении векторов, что непосредственно следует из (2).

Объемом параллелоэдра в V_n называется величина

$$V = e_{i_1 i_2 \dots i_n} a^{i_1}_{.1} a^{i_2}_{.2} \dots a^{i_n}_{.n}, \quad (6)$$

составленная с помощью дискриминантного тензора, т. е. такого поливектора, которому соответствует плотность

$$e = \sqrt{|g|}, \quad (7)$$

где g — дискриминант основного тензора. Из (7,5) следует, что объем

$$V = \sqrt{|g|} \text{Det} \parallel a^j_{.i} \parallel = (\text{Det} \parallel g_{rs} a^r_{.i} a^s_{.j} \parallel)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

выражается через скалярные произведения. Вследствие этого объем параллелограмма в V_n сохраняется при параллельном переносе тех векторов, на которых он построен. Таким образом, дискриминантный тензор V_n есть его основной n -вектор, удовлетворяющий уравнению

$$\nabla_k e_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0. \quad (9)$$

Полагая $\omega_k = 0$ в формуле (42,10), получим

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ i \ j \end{matrix} \right\}, \quad (10)$$

вследствие чего коэффициенты связности V_n равны скобкам Кристоффеля основного тензора.

Производя свертывание и сравнивая с (41,5), мы приходим к соотношениям

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ k \ i \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial u^i}, \quad (11)$$

справедливым для любого невырожденного тензора g_{ij} .

В общем случае W_n дополнительный вектор ω_i метрики, индуцированной на X_m при натуральном оснащении, выражается через дополнительный вектор внешнего пространства по формуле

$$\omega_i = x_i^a \omega_a.$$

Поэтому $\omega_i = 0$, если $\omega_a = 0$, и, следовательно, при натуральном оснащении X_m в V_n на ней индуцируется риманова геометрия.

Шлефли принадлежит теорема, согласно которой всякая риманова связность m измерений может быть реализована в качестве индуцированной связности на поверхности X_m евклидова пространства, число измерений которого

$$n \geq \frac{m(m+1)}{2}.$$

Если тензор g_{ij} в V_n пронормирован натурально, то он пронормирован и на каждой неизотропной кривой и натуральный параметр s всякой такой кривой удовлетворяет условию

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j. \quad (12)$$

Значение интеграла

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{|g_{ij} du^i du^j|} \quad (13)$$

для кривой V_n называется *длиной ее дуги*.

Развертывание кривой риманова пространства в кривую пространства Евклида происходит так же, как и в случае пространства Вейля, с той лишь разницей, что развернутая кривая определяется с точностью до движения, так как возможность ее подобного преобразования исключается определенным выбором основного метрического тензора.

Условия интегрируемости (42,17) принимают для V_n вид

$$R_{lki}^s g_{sj} + R_{lkj}^s g_{is} = 0,$$

или

$$R_{lk(ij)} = 0. \quad (14)$$

Евклидово пространство можно считать частным случаем пространства Римана, так как его метрический тензор удовлетворяет условиям (16,9), которые равносильны уравнениям (2).

§ 44. Конформное соответствие

Если между точками двух метрических пространств можно установить такое взаимно однозначное и дифференцируемое соответствие, при котором основные поляритеты этих пространств совпадают, то это соответствие называется *конформным*, а пространства — *конформными друг другу*. Очевидно, конформное соответствие характеризуется также равенством углов между соответствующими направлениями в обоих пространствах.

Для того чтобы соответствие было конформным, необходимо и достаточно, чтобы основные тензоры пространств, заданные в общей системе криволинейных координат, отличались только скалярным множителем. Пользуясь произволом в выборе этого множителя, можно считать эти тензоры одинаковыми.

Итак, мы можем считать, что в метрических пространствах, находящихся в конформном соответствии, основ-

ные тензоры совпадают, а дополнительные векторы отличаются друг от друга.

При условии

$$\check{g}_{ij} = g_{ij} \quad (1)$$

разность

$$p_i = \omega_i - \check{\omega}_i \quad (2)$$

между дополнительными векторами пространств не изменяется при совместном перенормировании основных тензоров и представляет собою ковектор, который мы будем называть *вектором конформного преобразования*.

Для двух конформных пространств Вейля, согласно (42,10),

$$\begin{aligned} \check{\Gamma}_{ij}^k &= \left\{ \begin{matrix} k \\ i \ j \end{matrix} \right\} - (\check{\omega}_i \delta_j^k + \check{\omega}_j \delta_i^k - \check{\omega}_m g^{km} g_{ij}), \\ \Gamma_{ij}^k &= \left\{ \begin{matrix} k \\ i \ j \end{matrix} \right\} - (\omega_i \delta_j^k + \omega_j \delta_i^k - \omega_m g^{km} g_{ij}), \end{aligned}$$

и, следовательно, тензор аффинной деформации, соответствующий конформному преобразованию, имеет вид

$$T_{\cdot ij}^k = T_{\cdot ij}^{km} p_m, \quad (3)$$

где

$$T_{\cdot ij}^{km} = \delta_i^k \delta_j^m + \delta_j^k \delta_i^m - g^{km} g_{ij}, \quad (a)$$

причем g_{ij} — общий основной тензор пространств, а p_m — вектор конформного преобразования.

Тензор $T_{\cdot ij}^{km}$ обладает следующими свойствами:

$$T_{\cdot im}^{km} = n \delta_i^k, \quad (b)$$

$$\nabla_l T_{\cdot ij}^{km} = 0, \quad \check{\nabla}_l T_{\cdot ij}^{km} = 0. \quad (c)$$

Из (c) получаем соотношение

$$T_{\cdot ij}^{ml} T_{\cdot rm}^k + T_{\cdot ij}^{km} T_{\cdot rm}^l - T_{\cdot mj}^{kl} T_{\cdot ri}^m - T_{\cdot im}^{kl} T_{\cdot rj}^m = 0,$$

справедливое при любом значении p_j и, следовательно, равносильное соотношению

$$T_{\cdot ij}^{ml} T_{\cdot rm}^{ks} + T_{\cdot ij}^{km} T_{\cdot rm}^{ls} - T_{\cdot mj}^{kl} T_{\cdot ri}^{ms} - T_{\cdot im}^{kl} T_{\cdot rj}^{ms} = 0. \quad (d)$$

В частном случае конформных пространств Римана мы уже не можем располагать выбором основных тензоров, т. е. тензоров, находящихся в натуральном нормировании, и условие конформности принимает вид

$$\check{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij}, \quad (4)$$

но в таком случае дискриминанты основных форм связаны соотношением

$$\check{g} = \lambda^{2n} g,$$

откуда и из (43,11)

$$T_{ki}^k = \partial_i \ln \sqrt{\check{g}} - \partial_i \ln \sqrt{g} = n \partial_i \ln \lambda,$$

и, применяя формулу (3), мы получим следующее выражение для векторов конформного преобразования:

$$p_i = \partial_i \ln \lambda. \quad (5)$$

В частности, отсюда следует, что *конформное преобразование, переводящее риманово пространство в риманово, характеризуется тем, что вектор этого преобразования градиентен.*

Общий основной тензор конформных W_n удовлетворяет уравнениям

$$\nabla_k g_{ij} = 2\omega_k g_{ij}, \quad \check{\nabla}_k g_{ij} = 2\check{\omega}_k g_{ij},$$

а значит, и уравнению

$$\overset{c}{\nabla}_k g_{ij} = (\omega_k + \check{\omega}_k) g_{ij},$$

где $\overset{c}{\nabla}$ — символ ковариантного дифференцирования в связности, которая является средней (см. § 34) между связностями обеих W_n . Мы видим, таким образом, что *средняя связность двух конформных W_n есть тоже связность пространства Вейля, находящегося в конформном соответствии с ними обоими.* Так как

$$2\overset{c}{\omega}_k = \omega_k + \check{\omega}_k = 2\omega_k - p_k,$$

то вектор конформного преобразования, соответствующего переходу от связности Γ_{ij}^k к средней связности,

$$\overset{c}{p}_k = \frac{p_k}{2}. \quad (6)$$

Воспользуемся этими замечаниями для вывода зависимости между тензорами кривизны конформных пространств. Согласно (35,10)

$$\check{R}_{ijk.}^l = R_{ijk.}^l + 2\check{\nabla}_{[i}T_{j]k}^l,$$

но

$$\check{\nabla}_i T_{jk}^l = \check{\nabla}_i p_j \delta_k^l + \check{\nabla}_i p_k \delta_j^l - \check{\nabla}_i p_m g^{ml} g_{ik}^*),$$

а вследствие (3) и (6)

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2} T_{..ij}^{km} p_m,$$

откуда

$$\check{\nabla}_i p_j = \nabla_i p_j - (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k) p_k = \nabla_i p_j - \frac{1}{2} T_{..ij}^{km} p_k p_m.$$

Итак, **искомое соотношение** имеет вид

$$\check{R}_{ijk.}^l = R_{ijk.}^l + 2T_{..k[j}^{lm} p_{i]m}, \quad (7)$$

где

$$p_{ij} = \check{\nabla}_i p_j = \nabla_i p_j - \frac{1}{2} T_{..ij}^{km} p_k p_m. \quad (8)$$

По той же формуле тензор кривизны $R_{ijk.}^l$ любой связности Вейля может быть выражен через тензор кривизны $K_{ijk.}^l$ собственной связности основного тензора g_{ij} . При этом достаточно положить $p_i = -\omega_i$, и мы получим

$$R_{ijk.}^l = K_{ijk.}^l + 2T_{..k[j}^{lm} \Omega_{i]m}, \quad (9)$$

где

$$\Omega_{ij} = -\overset{0}{\nabla}_i \omega_j - \frac{1}{2} T_{..ij}^{km} \omega_k \omega_m, \quad (10)$$

а $\overset{0}{\nabla}$ — знак дифференцирования в собственной связности.

При конформном преобразовании *римановых* пространств формула (7) несколько упрощается, так как в этом случае p_i — градиент, а p_{ij} симметричен, т. е.

$$p_{[ij]} = 0. \quad (11)$$

*) При дифференцировании следует использовать формулу (42,7).

§ 45. Конформно-евклидово пространство

Пространство W_n , конформное евклидову пространству, называется *конформно-евклидовым* и обозначается через C_n . Основной тензор g_{ij} можно выбрать и отнести к такой системе координат, в которой

$$g_{ij}x^ix^j = \sum_1^n \varepsilon_k (x^k)^2, \quad \varepsilon_k = \pm 1. \quad (1)$$

Из (44,7), полагая $\check{R}_{ijk}{}^l = 0$, мы получим, что тензор кривизны C_n имеет следующую алгебраическую структуру:

$$R_{ijk}{}^l = 2T_{..k[i}p_{j]m}g^{ml} \quad (2)$$

или $R_{ijk}{}^l = 2p_{[ji]}\delta_k^l + 2\delta_{[i}p_{j]k} - 2g_{k[i}p_{j]m}g^{ml}$. Из соотношения (44,8) следует, кроме того, что существует вектор p_i , удовлетворяющий уравнениям

$$\nabla_j p_k = p_{jk} + \frac{1}{2} T_{..jk} p_m p_l. \quad (3)$$

Условия интегрируемости (3) будут иметь вид

$$-\frac{1}{2} R_{ijk}{}^s p_s = \nabla_{[i} p_{j]k} + T_{..k[j} \nabla_{i]} p_l p_m. \quad (4)$$

Заменяя тензор кривизны с помощью (2), а $\nabla_i p_j$ — с помощью (3), получим

$$-T_{..k[i} p_{j]m} p_s = \nabla_{[i} p_{j]k} + T_{..k[j} p_{i]l} p_m + \frac{1}{2} T_{..k[j} T_{..i]l} p_a p_b p_m.$$

Отсюда, вследствие (44,d), имеем

$$\nabla_{[i} p_{j]k} = 0. \quad (5)$$

Итак, для того чтобы пространство Вейля было конформно-евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы существовал тензор p_{ij} , удовлетворяющий условиям (2) и (5). Можно показать, что при $n > 3$ условие (5) является следствием (2). Для доказательства достаточно применить тождество Бианки — Падова.

Тензор p_{ij} , если он существует, можно выразить через основной тензор и тензор кривизны. Действительно, свертывая (2) по индексам i и l , получим

$$R_{jk} = (n-1) p_{jk} - p_{kj} + g^{rs} p_{rs} g_{jk}. \quad (6)$$

Свертывание с g^{jk} дает

$$g^{jk}R_{jk} = 2(n-1)g^{jk}p_{jk}. \quad (7)$$

Но

$$R_{jk} + (n-1)R_{kj} = n(n-2)p_{kj} + ng^{rs}p_{rs}g_{jk},$$

откуда следует соотношение

$$p_{kj} = \frac{1}{n-2} \left[\frac{R_{jk} + (n-1)R_{kj}}{n} - \frac{g^{rs}R_{rs}}{2(n-1)} g_{kj} \right], \quad (8)$$

которое, очевидно, имеет смысл только при $n > 2$.

Если C_n риманово, то формулы принимают более простой вид:

$$R_{ijk}{}^l = 2\delta_{[i}^l p_{j]k} - 2g_{k[i} p^l{}_{.j]}, \quad (2')$$

$$R_{jk} = (n-2)p_{jk} + p^l{}_{.l}g_{jk}, \quad (6')$$

$$p_{kj} = \frac{1}{n-2} \left[R_{kj} - \frac{R^s{}_{.s}}{2(n-1)} g_{kj} \right]. \quad (8')$$

§ 46. Геодезическое отображение

Если между точками двух пространств аффинной связности установлено такое взаимно однозначное и дифференцируемое соответствие, при котором геодезические линии одного пространства соответствуют геодезическим линиям другого, то это соответствие называется *геодезическим* или *проективным*, а о пространствах говорят, что они *проективны* друг другу.

Отнеся пространства к системе координат, общей по отношению к проективному соответствию, мы будем иметь, согласно определению, что уравнения геодезических

$$\check{\delta}(du^i) = \lambda du^i, \quad \delta(du^i) = \mu du^i$$

равносильны друг другу. Поэтому уравнения

$$(\check{\Gamma}_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i) du^j du^k = T_{jk}^i du^j du^k = \nu du^i,$$

или равносильные им уравнения

$$du^{[l} T_{jk}^{i]} du^j du^k = 0, \quad (*)$$

должны удовлетворяться тождественно, т. е. при любых значениях du^i . Поэтому

$$\delta_{(m}^{[l} T_{jk]}^i = 0,$$

а если рассматриваемые связности обе не имеют кручения, что мы будем предполагать при всех дальнейших рассмотрениях, то

$$\delta_m^{[l} T_{jk]}^i + \delta_j^{[l} T_{km]}^i + \delta_k^{[l} T_{mj]}^i = 0. \quad (1)$$

Свертывая по индексам l и m , мы получим

$$(n + 1) T_{jk}^i - \delta_j^i T_{mk}^m - \delta_k^i T_{mj}^m = 0,$$

откуда следует, что *тензор аффинной деформации, соответствующей проективному отображению, имеет вид*

$$T_{jk}^i = \delta_j^i p_k + \delta_k^i p_j = (\delta_j^i \delta_k^m + \delta_k^i \delta_j^m) p_m = T_{..jk}^{im} p_m, \quad (2)$$

где

$$p_i = \frac{1}{n + 1} T_{mi}^m. \quad (3)$$

Обратно, если это уравнение выполнено, то подстановка T_{jk}^i в уравнение (*) обращает его в тождество. Тензор $T_{..jk}^{im}$, аналогично (44,с), обладает свойством

$$\nabla_l T_{..jk}^{im} = 0, \quad (с)$$

а значит, и

$$T_{..ij}^{ml} T_{..rm}^{ks} + T_{..ij}^{km} T_{..rm}^{ls} - T_{..mj}^{kl} T_{..ri}^{ms} - T_{..im}^{kl} T_{..rj}^{ms} = 0. \quad (d)$$

Вектор p_i мы будем называть *вектором проективного преобразования связности*.

Если оба отображенных пространства эквиаффинны, то из соотношений (41,5) и (3) следует, что

$$p_i = \frac{1}{n + 1} \partial_i \ln \frac{\check{e}}{e}, \quad (3')$$

где e и $\check{e}$ — основные плотности. Иначе говоря, обозначая через s и σ элементы объемов в пространствах эквиаффин-

ной связности, отображаемых проективно, мы будем иметь

$$p_i = \partial_i \ln \sqrt[n+1]{\frac{\sigma}{s}}. \quad (4)$$

Из приведенного соотношения следует: для того чтобы проективное отображение сохраняло эквиаффинность, необходимо и достаточно, чтобы вектор преобразования был градиентен.

Чтобы найти соотношение между тензорами кривизны двух пространств, проективных друг другу, сравним выражение (2) тензора аффинной деформации с выражением (44,3) этого же тензора, соответствующего конформному преобразованию. Они отличаются членом $p_m g^{mk} g_{ij}$. Легко видеть, что вследствие этого все выкладки, приводящие к соотношению между тензорами кривизны конформных пространств, сохраняют свою силу для пространств, проективных друг другу, если в предыдущих вычислениях всюду отбросить члены, содержащие тензор g_{ij} , и мы получим вместо (44,7) следующее соотношение:

$$\check{R}_{ijk}{}^l = R_{ijk}{}^l + 2p_{[ij} \delta_{k]}^l + 2\delta_{[j}^l p_{i]k}, \quad (5)$$

или

$$\check{R}_{ijk}{}^l = R_{ijk}{}^l + 2T^{lm}{}_{.k[j} p_{i]m}, \quad (5')$$

где

$$p_{ij} = \nabla_i p_j - \frac{1}{2} T^{mn}{}_{.ij} p_m p_n = \nabla_i p_j - p_i p_j, \quad (6)$$

а p_i — вектор проективного преобразования.

В заключение установим, могут ли два пространства находиться одновременно в конформном и проективном соответствии. В этом случае

$$p_i \delta_j^k + p_j \delta_i^k - g_{ij} g^{km} p_m = q_i \delta_j^k + q_j \delta_i^k.$$

Но свертывая сначала по индексам k и j , а потом свертывая с тензором g^{ij} , мы получим два уравнения:

$$n p_i = (n + 1) q_i, \quad (2 - n) p_i = 2 q_i,$$

которые удовлетворяются при целом n только нулевыми значениями векторов p_i и q_i .

Итак, если конформное соответствие двух пространств является в то же время и проективным, то связности этих пространств совпадают.

§ 47. Проективно-евклидово пространство

Пространство A_n , проективное евклидову пространству, называется *проективно-евклидовым* *).

По определению геодезические линии такого пространства могут быть отображены в прямые линии пространства R_n . Но если это последнее отнесено к декартовой системе координат, то его прямые могут быть определены пересечением $n - 1$ гиперплоскости, т. е. заданы $n - 1$ линейным уравнением. Таким образом, проективно-евклидово пространство характеризуется тем, что в нем могут быть введены такие системы криволинейных координат, в которых каждая геодезическая линия пространства может быть задана $n - 1$ линейным уравнением или же n линейными параметрическими уравнениями.

Полагая в (46,5) $\check{R}_{ijk}^l = 0$, получим соотношение

$$R_{ijk}^l = 2T_{..k[i}p_{j]m} = 2p_{[ji]}\delta_k^l + 2\delta_{[i}p_{j]k}, \quad (1)$$

характеризующее алгебраическую структуру тензора кривизны. Из (46,6) следует, кроме того, что существует вектор p_i , удовлетворяющий уравнениям

$$\nabla_j p_k = p_{jk} + \frac{1}{2} T_{..jk} p_a p_b. \quad (2)$$

Повторяя рассуждения § 45, получим следующие условия интегрируемости уравнений (2):

$$\nabla_{[i} p_{j]k} = 0. \quad (3)$$

Итак, для того чтобы пространство аффинной связности без кручения было проективно-евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы существовал тензор p_{jk} , удовлетворяющий условиям (1) и (3).

Можно показать, что при $n > 2$ условие (3) является следствием условия (1), что доказывается с помощью тождества Бианки — Падова.

*) См. также § 62 главы V.

Тензор p_{ij} может быть выражен через тензор Риччи. Свертывая (1) по индексам i и l , получим

$$R_{jk} = np_{jk} - p_{kj}, \quad (4)$$

а сравнивая с уравнением $R_{kj} = np_{kj} - p_{jk}$, будем иметь

$$p_{kj} = \frac{nR_{jk} + R_{kj}}{n^2 - 1}. \quad (5)$$

Если проективно-евклидово пространство является одновременно и эквиаффинным, то мы будем для краткости называть его *эквипроективным*. Так как его тензоры Риччи и p_{ij} симметричны, то уравнения (1) и (5) превращаются в уравнения

$$R_{ijk}{}' = 2\delta_{[i}^l p_{j]k}, \quad (1')$$

$$R_{jk} = (n - 1) p_{jk}, \quad (4')$$

а тензор Риччи подчинен условию

$$\nabla_{[i} R_{j]k} = 0, \quad (6)$$

которое обычно называют *уравнением Кодацци*, если удовлетворяющий ему тензор симметричен.

Для уравнения Кодацци в эквипроективном пространстве можно указать общее решение. Рассмотрим для этого систему дифференциальных уравнений

$$b_{jk} = \nabla_j \nabla_k \varphi + \frac{\varphi}{n-1} R_{jk}, \quad (7)$$

где b_{jk} — симметричный тензор, и будем искать условия ее интегрируемости, предполагая, что пространство эквипроективно. Дифференцируя еще раз и альтернируя, получим

$$-\frac{1}{2} R_{ijk}{}^m \varphi_m = \nabla_{[i} b_{j]k} + \frac{\nabla_{[i} \varphi R_{j]k}}{n-1} + \frac{\varphi}{n-1} \nabla_{[i} R_{j]k},$$

но вследствие (1), (4') и (6) ряд членов уничтожается и остается условие

$$\nabla_{[i} b_{j]k} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, общее решение уравнения (8) в эквипроективном пространстве имеет вид (7), где φ — произвольная функция. В частности, в евклидовом пространстве,

которое, очевидно, является эквипроективным, общее решение уравнения (8) имеет вид

$$b_{ij} = \nabla_i \nabla_j \varphi. \quad (9)$$

§ 48. Проективно-евклидово пространство Вейля

Тензор кривизны проективно-евклидова пространства Вейля удовлетворяет одновременно условиям (47,1) и (42,17), откуда следует, что

$$R_{ijk}^s g_{sl} + R_{ijl}^s g_{ks} = 4p_{[ji]} g_{kl} + 2g_{l[i} p_{j]k} + 2g_{k[i} p_{j]l} = \\ = -4\nabla_{[i} \omega_{j]} g_{kl}. \quad (1)$$

Свертывая с g^{kl} , получим

$$4np_{[ji]} + 2p_{ji} - 2p_{ij} = -4n\nabla_{[i} \omega_{j]},$$

или

$$(n+1)p_{[ji]} = n\nabla_{[i} \omega_{j]}. \quad (2)$$

Теперь условие (1) может быть приведено к виду

$$n(g_{l[i} p_{j]k} + g_{k[i} p_{j]l}) = 2p_{[ji]} g_{kl},$$

что дает после свертывания с g^{li}

$$np_{jk} - g^{il} p_{il} g_{jk} = \frac{4}{n} p_{[jk]} \quad (3)$$

и после альтернирования

$$(n^2 - 4)p_{[jk]} = 0. \quad (4)$$

При $n > 2$ отсюда следует $p_{[jk]} = 0$, и потому в силу (2) $\nabla_{[j} \omega_{k]} = 0$, что характеризует геометрию Римана.

Итак, при $n > 2$ проективно-евклидово пространство Вейля может быть только римановым.

Случай $n = 2$ будет рассмотрен особо в § 108.

Проективно-евклидово пространство Римана называется *пространством постоянной кривизны* или S_n . Согласно (3) для этого пространства

$$p_{ij} = kg_{ij}. \quad (5)$$

Предполагая, что g_{ij} — основной тензор S_n , будем иметь вследствие (47,3)

$$\nabla_{[r} p_{j]i} = \partial_{[r} k g_{j]i} = 0$$

и после свертывания с g^{ij}

$$\partial_r k = 0, \quad (6)$$

так что скаляр k , который называется *скалярной кривизной* S_n , постоянен.

Сопоставляя (5) и (47,1), мы получим строение тензора кривизны, характеризующее пространство постоянной кривизны:

$$R_{ijk}{}^l = k (\delta_i^l g_{jk} - \delta_j^l g_{ik}), \quad (7)$$

откуда следует, в частности, что

$$R_{jk} = (n - 1) k g_{jk}. \quad (8)$$

Вводя тензор (45,8')

$$\bar{p}_{kj} = \frac{1}{n-2} \left[R_{jk} - \frac{g^{rs} R_{rs}}{2(n-1)} g_{jk} \right],$$

который для нашего случая принимает вид

$$\bar{p}_{kj} = \frac{k}{2} g_{kj},$$

получим соотношения

$$R_{ijk}{}^l = 2\delta_{[i}^l \bar{p}_{j]k} - 2g_{k[j} \bar{p}_{i]m} g^{ml}, \quad (9)$$

$$\nabla_{[r} \bar{p}_{j]k} = 0, \quad (10)$$

показывающие, что S_n является *конформно-евклидовым*. Пространство S_n будет евклидовым тогда и только тогда, когда $k = 0$. Поэтому при $k \neq 0$ соответствия, отображающие S_n на E_n геодезически и конформно, необходимо отличаются друг от друга.

§ 49. Связность, допускающая абсолютный параллелизм направлений

Будем говорить, что пространство допускает *абсолютный параллелизм направлений*, если каждое направление, заданное в его точке, может быть включено в такое поле, направления которого переносятся параллельно по любому пути, т. е. если уравнение

$$\nabla_s v^j = \lambda_s v^j \quad (1)$$

интегрируемо при любых начальных условиях.

Составляя условие интегрируемости и предполагая, что кручение равно нулю, получим

$$R_{rsm}{}^j v^m = 2\nabla_{[r} \lambda_{s]} v^j,$$

или

$$R_{rsm} [^j v^k] v^m = 0.$$

Для того чтобы последнее уравнение удовлетворялось в A_n при любых значениях v^i , необходимо и достаточно, чтобы

$$4R_{rs(m} [^j \delta_l^k] = R_{rsm} .^j \delta_l^k + R_{rsl} .^j \delta_m^k - R_{rsm} .^k \delta_l^j - R_{rsl} .^k \delta_m^j = 0.$$

Свертывание по k и l дает

$$R_{rsm} .^j = \frac{1}{n} R_{rsk} .^k \delta_m^j, \quad (2)$$

а применение тождества (35,4) —

$$(n - 2) R_{rsm} .^m = 0, \quad (3)$$

откуда, следует, что при $n > 2$ $R_{rsm} .^j = 0$ и A_n без кручения, допускающее абсолютный параллелизм направлений, есть R_n .

Случай $n = 2$ будет рассматриваться особо в § 89.

§ 50. Сопряженные связности

Приведем предварительно несколько формальных замечаний. В дальнейшем нам придется рассматривать пару аффинных связностей, заданных в одном пространстве X_n . При этом мы будем пользоваться операцией смешанного ковариантного дифференцирования, введенной нами в § 37. В общем случае эта операция применялась к тензорам, индексы которых относились к различным многообразиям, принимали независимые между собой значения и поэтому обозначались буквами, принадлежащими различным, заранее выбранным группам.

В случае, который нас интересует, индексы принадлежат одному многообразию, и нам нет нужды поэтому вводить различные группы букв. Применяемую в дальнейшем систему обозначений поясним на примере ковариантного тензора второй валентности.

Если G_{ij}^k и Γ_{ij}^k суть коэффициенты двух связностей G и Γ , заданных в X_n , то ковариантную производную относительно связности G будем обозначать, как обычно:

$$\nabla_k b_{ij} = \partial_k b_{ij} - G_{ki}^m b_{mj} - G_k^m b_{im}. \quad (1)$$

Для ковариантной же производной относительно второй связности и для смешанной производной введем следующие обозначения:

$$\nabla_k b_{(i)(j)} = \partial_k b_{ij} - \Gamma_{ki}^m b_{mj} - \Gamma_{kj}^m b_{im}, \quad (2)$$

$$\nabla_k b_{i(j)} = \partial_k b_{ij} - G_{ki}^m b_{mj} - \Gamma_{kj}^m b_{im}. \quad (3)$$

Таким образом, мы будем оставлять под знаком дифференцирования индекс свободным, рассматривая его принадлежащим к области задания связности G , и будем ставить индекс в скобки, считая его принадлежащим к области задания связности Γ , хотя при этом и не следует забывать, что обе эти области находятся во взаимно однозначном соответствии или совпадают с одной и той же областью пространства X_n .

Все сказанное о смешанном дифференцировании в § 37 сохраняет силу и в нашем случае, а кроме того, добавляется простая и легко проверяемая формула

$$\nabla_k A_{i:\dots}^i = \nabla_k A_{(i):\dots}^{(i)},$$

которая показывает, что индексы суммирования можно по желанию считать принадлежащими любой из областей, не меняя результат дифференцирования.

Перейдем к основной теме настоящего параграфа. Предположим, что в пространстве X_n задано поле симметричного невырожденного псевдотензора b_{ij} . Как мы уже заметили в § 42, это равносильно заданию поля ритета в пространстве направлений, исходящих из каждой точки X_n , причем сопряженность направлений v^i и w^j относительно этого поля ритета характеризуется условием

$$b_{ij} v^i w^j = 0. \quad (4)$$

Будем говорить, что *перенесения направлений, определенные связностями G и Γ , сопряжены относительно тензора b_{ij}* , если сопряженность двух направлений относительно поля ритета, определяемого указанным тензором, сохраняется, когда одно из этих направлений переносится параллельно по любой кривой L в связности G , а другое — по той же кривой в связности Γ .

Чтобы найти условие сопряженности перенесений, предположим, что условия указанных параллельных перенесений выполнены для направлений v^i и w^j , так что

$$\delta v^i = \lambda v^i, \quad \delta w^{(j)} = \mu w^j, \quad (5)$$

и будем дифференцировать условие (4), предполагая, что оно сохраняет силу вдоль некоторой кривой. В таком случае

$$\delta b_{i(j)} v^i w^j + b_{ij} \delta v^i w^j + b_{ij} v^i \delta w^{(j)} = 0,$$

или, вследствие (5),

$$\delta b_{i(j)} v^i w^j = 0;$$

это уравнение должно вытекать из (4) для всех значений v^i и w^j , удовлетворяющих последнему. Условием этого будет соотношение

$$\delta b_{i(j)} = v b_{ij},$$

которое благодаря произвольности входящего в него вектора смещения сводится к следующему основному соотношению, характеризующему сопряженность перенесений, определенных связностями G и Γ :

$$\nabla_k b_{i(j)} = 2\omega_k b_{ij}. \quad (6)$$

Псевдотензор b_{ij} может быть подвергнут перенормированию, т. е. заменен новым $\check{b}_{ij}$, так, что

$$\check{b}_{ij} = \lambda^2 b_{ij}. \quad (7)$$

Произведя смешанное дифференцирование обеих частей этого равенства, получим

$$\nabla_k \check{b}_{i(j)} = 2(\omega_k + \partial_k \ln \lambda) \check{b}_{ij},$$

а условие сопряженности сохраняется при одновременном преобразовании (7) основного тензора пары и преобразовании

$$\check{\omega}_k = \omega_k + \partial_k \ln \lambda \quad (8)$$

дополнительного вектора ω_k .

Найдем тензор деформации

$$t_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - G_{ij}^k \quad (9)$$

для рассматриваемых связностей. Из основного соотношения следует

$$t_{kj}^m b_{mi} = \nabla_k b_{ij} - 2\omega_k b_{ij}, \quad (10)$$

или

$$t_{kj}^s = \tilde{b}^{sm} \nabla_k b_{jm} - 2\omega_k \delta_j^s. \quad (11)$$

Эта формула показывает, что, как и следовало ожидать, связность Γ определяется по связности G с точностью до преобразования вида (40,2):

$$T_{ij}^k = 2\omega_i \delta_j^k,$$

сохраняющего закон перенесения направлений и зависящего от выбора произвольного дополнительного вектора ω_k .

Чтобы устранить произвол в выборе этого вектора, потребуем выполнения условия

$$t_{ki}^k = t_{ik}^k, \quad (12)$$

значение которого выяснится ниже и которое дает

$$\tilde{b}^{sm} \nabla_{[s} b_{k]m} + (n-1) \omega_k = 0,$$

откуда

$$t_{kj}^s = \tilde{b}^{pm} \left(\delta_p^s \nabla_k b_{jm} + \frac{2}{n-1} \delta_j^s \nabla_{[p} b_{k]m} \right). \quad (13)$$

Будем говорить, что *связности G и Γ сопряжены между собою относительно тензора b_{ij}* , если перенесения направлений, определенные этими связностями, сопряжены относительно тензора b_{ij} и если, кроме того, выполнено условие (12). Формула (13) показывает, что связность Γ , сопряженная связности G относительно данного тензора b_{ij} , определяется однозначно.

Тензор t_{kj}^s зависит только от выбора поляритета, т. е. не меняется при перенормировании тензора b_{ij} . Этим же свойством обладает и вектор

$$t_i = \frac{1}{n+2} t_{ki}^k = \frac{n}{(n-1)(n+2)} \tilde{b}^{pq} \left(\nabla_p b_{qi} - \frac{1}{n} \nabla_i b_{pq} \right), \quad (14)$$

который мы будем называть *чебышевским вектором поляритета b_{ij} **). Если заменить в правой части (14) дифференцирование в связности G дифференцированием в связности Γ , то мы получим *чебышевский вектор второго рода τ_i* ,

*) Причина этого названия будет выяснена в § 98.

который будет связан с чебышевским вектором первого рода t_i очевидным равенством

$$\tau_i + t_i = 0. \quad (15)$$

§ 51. Сопряженные связности без кручения

Здесь и в дальнейшем мы будем предполагать, что сопряженные связности G и Γ не имеют кручения, что не противоречит условию (50,12), так как при этом

$$t_{jk}^i = t_{kj}^i. \quad (1)$$

Из (50,6) следует, что тензор b_{ij} , относящийся к связности без кручения G сопряженную связность Γ , тоже не имеющую кручения, не может быть произволен, а характеризуется тем, что удовлетворяет условию

$$\nabla_{[k} b_{j]i} = 2\omega_{[k} b_{j]i}, \quad (2)$$

которое мы будем называть *обобщенным уравнением Кодацци*.

Существование такого тензора накладывает условия и на самую связность G . Однако исключение b_{ij} из уравнения (2), по-видимому, сопряжено с большими трудностями.

Условие (2) заведомо удовлетворяется для основного тензора метрики Вейля, так как для него имеет место соотношение

$$\nabla_k g_{ji} = 2\omega_k g_{ji}.$$

Это же соотношение может рассматриваться как частный случай условия сопряженности (50,6) при

$$t_{jk}^i = 0. \quad (3)$$

Таким образом, *связность Вейля является самосопряженной по отношению к своему основному тензору*, что с очевидностью вытекает также из определения сопряженных связностей.

Наряду с двумя симметричными сопряженными связностями мы введем еще третью — *среднюю связность* $\mathcal{G}$, определив ее, как обычно, условиями

$$\mathcal{G}_{ij}^k = \frac{G_{ij}^k + \Gamma_{ij}^k}{2}. \quad (4)$$

Так как коэффициенты этой связности не участвуют в выражениях смешанных производных, то будем обозначать ковариантные производные в этой связности, не делая никаких отметок при индексах, но ставя букву «с» над знаком ковариантного или абсолютного дифференцирования, например:

$$\overset{c}{\nabla}_k b_{ij} = \partial_k b_{ij} - \mathcal{Z}_{ki}^m b_{mj} - \mathcal{Z}_{kj}^m b_{im}. \quad (5)$$

Сделав перестановку индексов в условии сопряженности

$$\nabla_k b_{i(j)} = 2\omega_k b_{ij},$$

получим

$$\nabla_k b_{(i)j} = 2\omega_k b_{ij},$$

а сравнивая полусуммы левых и правых частей, придем к соотношению

$$\overset{c}{\nabla}_k b_{ij} = 2\omega_k b_{ij}, \quad (6)$$

которое показывает, что *средняя связность пары сопряженных перенесений, не имеющих кручения, есть связность Вейля, основной и дополнительный тензоры которой совпадают с основным и дополнительным тензором пары.*

Если наряду с поляритетом b_{ij} рассматривается другой поляритет, определяемый тензором a_{ij} , то для него мы будем иметь очевидное соотношение

$$\overset{c}{\nabla}_k a_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_k a_{ij} + \nabla_k a_{(i)(j)}). \quad (7)$$

Можно также ввести в рассмотрение чебышевские векторы a_i , α_i , $\overset{c}{a}_i$ поляритета a_{ij} по отношению к связностям G , Γ и $\mathcal{Z}$ соответственно. Вследствие того, что правая часть (50, 14) линейна относительно ковариантных производных,

$$\overset{c}{a}_i = \frac{a_i + \alpha_i}{2}. \quad (8)$$

Вводя тензоры кривизны R_{ijk}^l и ρ_{ijk}^l связностей G и Γ , получим для них согласно (35, 10) соотношение

$$\rho_{rsm}^i = R_{rsm}^i + 2\overset{c}{\nabla}_{[r} t_{s]m}^i. \quad (9)$$

Другое соотношение мы получим, находя вторую альтернированную смешанную производную основного тензора. Для этого продифференцируем функцию

$$z = b_{ij}v^i w^j.$$

Ее первую производную можно представить в виде

$$\nabla_s z = \nabla_s b_{i(j)} v^i w^j + b_{ij} \nabla_s v^i w^j + b_{ij} v^i \nabla_s w^{(j)}.$$

При втором дифференцировании следует принять во внимание, что благодаря симметрии t_{rs}^m безразлично, к какой области относить индекс s . Поэтому

$$\left. \begin{aligned} & \nabla_r \nabla_s b_{i(j)} v^i w^j + \nabla_s b_{i(j)} \nabla_r v^i w^j + \nabla_s b_{i(j)} v^i \nabla_r w^{(j)} + \\ & + \nabla_r b_{i(j)} \nabla_s v^i w^j + b_{ij} \nabla_r \nabla_s v^i w^j + b_{ij} \nabla_s v^i \nabla_r w^{(j)} + \\ & + \nabla_r b_{i(j)} v^i \nabla_s w^{(j)} + b_{ij} \nabla_r v^i \nabla_s w^{(j)} + b_{ij} v^i \nabla_r \nabla_s w^{(j)} = 0. \end{aligned} \right\} [rs]$$

Приводя подобные члены, принимая во внимание произвольность v^i , w^j , а также то, что

$$\nabla_{[r} \nabla_{s]} b_{i(j)} = 2 \nabla_{[r} \omega_{s]} b_{ij},$$

приходим к формуле

$$R_{rsj}^m b_{im} + \rho_{rsi}^m b_{jm} = -4 \nabla_{[r} \omega_{s]} b_{ij}, \quad (10)$$

которая является обобщением формулы (42,17), имеющей место для W_n , т. е. для самосопряженной связности.

§ 52. Составное преобразование

Подвергнем связность G сопряженной пары (G, Γ) проективному преобразованию, полагая, согласно (46,2),

$$'G_{ij}^k - G_{ij}^k = T_{ij}^k = \delta_i^k p_j + \delta_j^k p_i, \quad (1)$$

и найдем закон преобразования связности Γ , предполагая, что она остается сопряженной G относительно тензора b_{ij} , удовлетворяющего уравнению (51,2):

$$\nabla_{[k} b_{j]i} = 2 \omega_{[k} b_{j]i}.$$

В результате мы будем иметь

$$' \nabla_{[k} b_{j]i} = \nabla_{[k} b_{j]i} - T_i^m{}_{[k} b_{j]m} = 2 \omega_{[k} b_{j]i} - p_{[k} b_{j]i},$$

или

$$' \nabla_{[k} b_{j]i} = 2' \omega_{[k} b_{j]i},$$

где

$$'\omega_k = \omega_k - \frac{p_k}{2}.$$

Но $'\omega_k$ есть дополнительный вектор средней связности Вейля, вследствие чего эта связность подвергается преобразованию (44,3):

$$'z_{ij}^k = z_{ij}^k + \frac{1}{2} (p_i \delta_j^k + p_j \delta_i^k - b_{ij} \tilde{b}^{km} p_m);$$

отсюда

$$'G_{ij}^k + '\Gamma_{ij}^k = G_{ij}^k + \Gamma_{ij}^k + p_i \delta_j^k + p_j \delta_i^k - b_{ij} \tilde{b}^{km} p_m,$$

что дает при сравнении с (1)

$$' \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - b_{ij} \tilde{b}^{km} p_m. \quad (2)$$

В силу полной симметрии определения сопряженности естественно рассмотреть преобразование, сохраняющее сопряженность двух связностей относительно данного тензора и состоящее из двух последовательно выполненных проективных преобразований каждой связности. Мы будем называть его *составным* преобразованием пары сопряженных связностей.

Если векторы проективных преобразований, указанных в определении, — соответственно p_i и π_i , то составное преобразование обозначается символом (p_i, π_i) и определяется формулами, которые непосредственно вытекают из (1) и (2):

$$\left. \begin{aligned} 'G_{ij}^k &= G_{ij}^k + \delta_i^k p_j + \delta_j^k p_i - b_{ij} \tilde{b}^{km} \pi_m, \\ '\Gamma_{ij}^k &= \Gamma_{ij}^k + \delta_i^k \pi_j + \delta_j^k \pi_i - b_{ij} \tilde{b}^{km} p_m, \\ 'z_{ij}^k &= z_{ij}^k + \delta_i^k \sigma_j + \delta_j^k \sigma_i - b_{ij} \tilde{b}^{km} \sigma_m, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где

$$\sigma_i = \frac{p_i + \pi_i}{2}. \quad (4)$$

Закон преобразования тензора t_{jk}^i , очевидно, будет иметь вид

$$'t_{ij}^k = t_{ij}^k + \delta_i^k \delta_j + \delta_j^k \delta_i + b_{ij} \tilde{b}^{km} \delta_m, \quad (5)$$

где

$$\delta_i = \pi_i - p_i, \quad (6)$$

а закон преобразования чебышевского вектора первого рода —

$$'t_i = t_i + \delta_i. \quad (7)$$

Составляя комбинацию

$$B^k_{.ij} = t^k_{ij} - (\delta^k_i t_j + \delta^k_j t_i + b_{ij} \tilde{b}^{km} t_m), \quad (8)$$

мы без труда убеждаемся, что тензор $B^k_{.ij}$ есть инвариант составного преобразования.

Отметим некоторые свойства тензора $B^k_{.ij}$.

1. Он не зависит от нормирования основного тензора b_{ij} пары сопряженных связностей.

2. Он симметричен по своим нижним индексам.

3. Он удовлетворяет условию

$$B^k_{.ki} = 0. \quad (9)$$

4. Тензор

$$D_{ijk} = b_{km} B^m_{.ij} \quad (10)$$

симметричен по всем своим индексам.

Действительно,

$$D_{ijk} = b_{km} t^m_{ij} - (b_{ij} t_k + b_{jk} t_i + b_{ki} t_j); \quad (11)$$

первое слагаемое симметрично вследствие (50,10) и (51,2), симметрия же группы остальных слагаемых очевидна. Тензор D_{ijk} зависит от нормирования; при перенормировании он умножается на тот же множитель, что и основной тензор. В силу (9) этот тензор удовлетворяет так называемому условию аполярности

$$\tilde{b}^{ij} D_{ijk} = 0 \quad (12)$$

по отношению к тензору b_{ij} .

Среди частных случаев составных преобразований отметим:

1) Проективные преобразования первого и второго родов, символы которых суть $(p_i, 0)$ и $(0, \pi_i)$ соответственно.

2) Симметрическое преобразование (p^i, p_i) . Это преобразование характеризуется любым из

условий:

$$\left. \begin{aligned} \delta_i &= 0, & (a) \\ 't_{ij}^k &= t_{ij}^k, & (b) \\ 't_k &= t_k. & (c) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Согласно условию (с) *симметрическое преобразование* есть такое преобразование, которое сохраняет чебышевский вектор основного поляритета пары.

3) *Кососимметрическое преобразование* $(p_i, -p_i)$ характеризуется также условием

$$\sigma_i = 0.$$

Имея в виду, что σ_i — вектор конформного преобразования средней метрики Вейля, мы можем сказать, что *кососимметрическое преобразование* есть такое составное преобразование, которое сохраняет среднюю связность пары.

Заметим, наконец, что *конформное преобразование связности Вейля* можно рассматривать как *симметрическое составное преобразование самосопряженной пары*.

§ 53. Специальные пары сопряженных связностей

Отметим важнейшие разновидности пар сопряженных перенесений.

1. *Чебышевская пара*. Будем называть пару сопряженных перенесений (G, Γ) *чебышевской*, если чебышевский вектор основного поляритета первого (а следовательно, и второго) рода равен нулю.

Условие

$$t_i = 0 \quad (1)$$

сохраняется в силу (52,7) при симметрическом преобразовании, вследствие чего *пара остается чебышевской при любом симметрическом составном преобразовании*.

Из (52,7) следует также, что любую пару сопряженных преобразований можно подвергнуть такому составному преобразованию, после которого она станет чебышевской, а из определения кососимметрического преобразования можно заключить, что для всякой пары единственным образом можно определить такое кососимметрическое преобразование, которое переводит ее в чебышевскую.

Так как для самосопряженной пары условие (1), очевидно, выполнено, то *самосопряженная пара является чебышевской*.

2. *К о д а ц ц и е в а п а р а*. Если основной тензор пары можно пронормировать так, чтобы он удовлетворял уравнению Кодацци

$$\nabla_{[k} b_{j]i} = 0, \quad (2)$$

то пара называется *кодацциевой*, а пронормированный тензор — *основным тензором кодацциевой пары*.

Принимая во внимание, что дополнительный вектор сопряженной пары, который является также дополнительным вектором средней метрики, равен нулю, мы видим, что *кодацциева пара есть такая пара сопряженных связностей, средняя связность которой риманова*. Из этого нового определения следует также, что *основной тензор, удовлетворяющий уравнению Кодацци по отношению к одной из связностей пары, удовлетворяет ему и по отношению к другой*.

Если основной тензор кодацциевой пары не нормирован, то дополнительный вектор ω_k является градиентом.

Так как конформное преобразование, сохраняющее риманов характер средней связности, должно определяться градиентным вектором σ_i , то *составное преобразование (p_i, π_i) сохраняет кодацциев характер пары тогда и только тогда, когда сумма $\pi_i + p_i$ есть градиент*.

3. *Э к в и а ф ф и н н а я п а р а*. Будем называть пару *эквиаффинной*, если обе составляющие ее сопряженные связности эквиаффинные.

Выпишем четыре условия:

а) Связность первого рода эквиаффинна:

$$G_{ki}^h = \partial_i \ln e. \quad (3)$$

б) Связность второго рода эквиаффинна:

$$\Gamma_{ki}^h = \partial_i \ln \varepsilon. \quad (4)$$

с) Средняя метрика эквиаффинна (т. е. риманова):

$$g_{ki}^h = \frac{G_{ki}^h + \Gamma_{ki}^h}{2} = \partial_i \ln \sqrt{b}, \quad (6)$$

где b — дискриминант основного тензора.

d) Чебышевский вектор основного тензора градиентен:

$$t_i = \frac{1}{n+2} (\Gamma_{ki}^k - G_{ki}^k). \quad (6)$$

Сравнивая их между собою, мы придем к следующему заключению: все вышеприведенные условия имеют место для эквиаффинной пары, и обратно, если какие-либо два из них выполнены, то выполнены и все четыре, и пара будет эквиаффинной.

В особенности отметим следующие результаты:

1. Для того чтобы симметричный тензор b_{ij} мог после надлежащей нормировки удовлетворять уравнению Кодацци по отношению к некоторой эквиаффинной связности, необходимо и достаточно, чтобы его чебышевский вектор был градиентен.

2. Эквиаффинная пара принадлежит к числу кодацциевых.

Рассмотрим элементы соответствующих объемов V_1 , V_2 , V_c эквиаффинных связностей G , Γ и ε .

Согласно (41,5), (43,11) и (3), (4), (5)

$$\frac{V_1}{e} = \frac{V_2}{\varepsilon} = \frac{V_c}{\sqrt{b}},$$

С другой стороны, согласно (6)

$$t_i = \frac{1}{n+2} \partial_i \ln \frac{e}{e}, \quad (7)$$

вследствие чего

$$t_i = \frac{1}{n+2} \partial_i \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right). \quad (8)$$

Итак, чебышевский вектор первого рода основного тензора эквиаффинной пары равен логарифмическому градиенту корня $(n+2)$ -й степени из отношения соответствующих элементарных объемов связностей второго и первого родов.

Таким же образом из (5) получим

$$\partial_i \ln \sqrt{b} = \frac{1}{2} \partial_i \ln (e\varepsilon),$$

или

$$b = c\varepsilon, \quad (9)$$

где c — константа, которую можно принять за единицу. Это равенство приводит к соотношению

$$V = \sqrt{V_1 V_2}, \quad (10)$$

которое показывает, что элемент объема в средней метрике эквиваффинной пары является средним пропорциональным соответствующих элементарных объемов связностей пары.

Очевидно, для чебышевской эквиваффинной пары характерно, что соответственные объемы во всех трех связностях G , Γ и $\mathcal{G}$ равны между собою.

Составное преобразование (p_i, π_i) , сохраняющее эквиваффинность пары, характеризуется тем, что оба его вектора градиентны.

4. Метрическая пара. Предположим, что связность G вейлева и g_{ij} — ее основной тензор. Изотропные направления этой метрики, т. е. направления, удовлетворяющие условию

$$g_{ij}v^i v^j = 0,$$

образуют конус второго порядка, а касательные гиперплоскости этого конуса v_i удовлетворяют условию

$$\tilde{g}^{ij}v_i v_j = 0.$$

Если в рассматриваемом пространстве задано, кроме того, поле поляритетов с основным тензором b_{ij} , то направления w^p , сопряженные гиперплоскостям v_i , определяются из соотношения

$$v_i = b_{ip}w^p$$

и удовлетворяют уравнению

$$\gamma_{pq}w^p w^q = 0,$$

где

$$\gamma_{pq} = b_{pi}b_{qj}\tilde{g}^{ij}. \quad (11)$$

Тензор γ_{pq} определяет конус второго порядка, полярный изотропному конусу метрики g_{ij} , или, иначе говоря, определяет поляритет, сопряженный основному поляритету метрики G по отношению к поляритету b_{ij} .

Будем дифференцировать тензор γ_{pq} в связности Γ , сопряженной связности G относительно b_{ij} , имея в виду

условия (42,3), (42,7) и (50,6), т. е.

$$\left. \begin{aligned} \nabla_k g_{ij} &= 2\omega_k^1 g_{ij}, & \nabla_k \tilde{g}^{ij} &= -2\omega_k^1 \tilde{g}^{ij}, \\ \nabla_k b_{i(j)} &= 2\omega_k b_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

В силу этих соотношений

$$\begin{aligned} \nabla_k \gamma_{(p)(q)} &= \nabla_k b_{(p)i} b_{qj} \tilde{g}^{ij} + b_{pi} \nabla_k b_{(q)j} \tilde{g}^{ij} + b_{pi} b_{qj} \nabla_k \tilde{g}^{(i)(j)} = \\ &= 2(2\omega_k - \omega_k^1) \gamma_{pq}, \end{aligned}$$

или

$$\nabla_k \gamma_{(i)(j)} = 2\omega_k^2 \gamma_{ij}, \quad (13)$$

причем

$$\omega_k = \frac{\omega_k^1 + \omega_k^2}{2}. \quad (14)$$

Равенство (13) приводит нас к следующему результату.

Связность Γ , сопряженная связности Вейля относительно поляритета b_{ij} , есть тоже связность Вейля. Основные тензоры g_{ij} и γ_{ij} связаны соотношением (11), т. е. основные поляритеты сопряжены относительно поляритета b_{ij} , а дополнительные векторы ω_k^1 и ω_k^2 и дополнительный вектор средней метрики связаны соотношением (14).

5. Риманова пара. Пара называется римановой, если обе сопряженные метрики римановы. Повторяя рассуждения пункта 3 этого параграфа и принимая во внимание, что эквиаффинная геометрия Вейля риманова, мы можем сформулировать следующий результат: *если для пары Вейля справедливы два из четырех условий:*

- а) *связность G риманова;*
- б) *связность Γ риманова;*
- с) *средняя связность риманова;*
- д) *чебышевский тензор основного тензора пары градиентен,* *то справедливы все четыре и пара риманова.*

6. Геодезическая пара. Найдем такое условие, при выполнении которого геодезическая линия связности G , имеющая в некоторой своей точке направление конуса поляритета b_{ij} , т. е. удовлетворяющая соотношению

$$b_{ij} du^i du^j = 0, \quad (15)$$

сохраняет это направление во всех своих точках. Так как линия геодезическая, то

$$\delta(du^i) = \lambda du^i,$$

и после дифференцирования (15) получим искомое условие:

$$\nabla_k b_{ij} du^k du^i du^j = 0. \quad (16)$$

Будем называть поляритет b_{ij} *геодезическим*, если рассмотренное свойство имеет место для всякой геодезической линии, касающейся конуса двойных направлений этого поляритета.

Для того чтобы поляритет был геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы условие (16) выполнялось вследствие (15), что равносильно зависимости

$$\nabla_{(k} b_{ij)} = a_{(k} b_{ij)}, \quad (17)$$

где a_k — некоторый вектор.

Допустим теперь, что b_{ij} удовлетворяет также обобщенному уравнению Кодацци. В таком случае, комбинируя уравнения

$$\begin{aligned} \nabla_k b_{ij} + \nabla_i b_{jk} + \nabla_j b_{ki} &= a_k b_{ij} + a_i b_{jk} + a_j b_{ik}, \\ \nabla_k b_{ij} - \nabla_i b_{kj} &= 2\omega_k b_{ij} - 2\omega_i b_{kj}, \\ \nabla_k b_{ij} - \nabla_j b_{ik} &= 2\omega_k b_{ij} - 2\omega_j b_{ik}, \end{aligned}$$

получим

$$3\nabla_k b_{ij} = (a_k + 4\omega_k) b_{ij} + (a_i - 2\omega_i) b_{jk} + (a_j - 2\omega_j) b_{ki},$$

или

$$\nabla_k b_{ij} = p_i b_{jk} + p_j b_{ik} + q_k b_{ij}.$$

Подставляя выражение $\nabla_k b_{ij}$ в правую часть (50,13), будем иметь

$$t_{jk}^i = \delta_j^i p_k + \delta_k^i p_j + b_{jk} \tilde{b}^{is} p_s,$$

а свертывание по индексам i и j дает

$$t_k = p_k,$$

откуда

$$B_{.jk}^i = t_{jk}^i - (\delta_j^i t_k + \delta_k^i t_j + b_{jk} \tilde{b}^{is} t_s) = 0. \quad (18)$$

Таким образом, *геодезический поляритет характеризуется обращением в нуль тензора $B_{.jk}^i$* . Симметрия призна-

ка позволяет утверждать, что *поляритет, являющийся геодезическим по отношению к связности G , будет также геодезическим по отношению к связности Γ , которая сопряжена связности G относительно этого поляритета.*

Основываясь на этом результате, мы будем называть пару связностей G, Γ , сопряженных относительно геодезического поляритета, *геодезической парой.*

Инвариантность тензора B^i_{jk} при составном преобразовании позволяет утверждать, что *составное преобразование не может нарушить геодезического характера пары.*

В пункте 1 мы отметили, что всякую пару можно сделать чебышевской с помощью некоторого составного преобразования. Применяв такое преобразование, для которого $\delta_i = -t_i$, в силу (18) и (52,5) получим

$$t^k_{ij} = 0, \quad (19)$$

и пара станет самосопряженной. Таким образом, *геодезическая пара характеризуется тем, что с помощью некоторого составного преобразования ее можно сделать самосопряженной.* В частности, очевидно, что *самосопряженная пара есть такая пара, которая является одновременно и геодезической, и чебышевской.*

7. Евклидова пара. Если связность G евклидова, то согласно формуле (51,10) для связности Γ будем иметь

$$\rho_{rsi}^m b_{jm} = -4\nabla_{[r}\omega_{s]} b_{ij},$$

или

$$\rho_{rsi}^m = -4\nabla_{[r}\omega_{s]} \delta_i^m.$$

Сравнение с (49,2) показывает, что связность Γ должна допускать в этом случае абсолютный параллелизм направлений, и при $n > 2$ она necessarily евклидова.

Итак, *связность без кручения, сопряженная евклидовой, допускает абсолютный параллелизм направлений, а при $n > 2$ она будет евклидовой.*

Так как средняя метрика Вейля пары евклидовых геометрий риманова, то основной тензор *евклидовой* пары может удовлетворять обобщенному уравнению Кодацци только при градиентном ω_k , а после соответствующего перенормирования он удовлетворяет уравнению Кодацци.

Что касается общего решения этого уравнения, то, как мы видели в § 47, в пространстве Евклида оно имеет вид

$$b_{ij} = \nabla^j \nabla_i \varphi,$$

где φ — произвольная функция точки.

§ 54. Понятие расслоенного пространства и обобщение понятия связности

Понятие аффинной связности и процесс ее построения могут быть обобщены следующим образом, который получает в последние годы весьма широкие приложения.

Рассмотрим дифференцируемое многообразие X_m , и пусть точка M этого многообразия определена координатами u^i , $i = 1, \dots, m$. Отнесем каждой точке M векторное пространство B_p с базисом, образованным векторами X_a , где $a = 1, \dots, p$, так что всякий вектор V , принадлежащий B_p ,

$$V = V^a X_a.$$

Совокупность элементов $S(M, V)$ образует *расслоенное пространство* (X_m, B_p) . S называется его *точкой*, X_m — *базой*, B_p — *слоем*, а M — *проекцией слоя на базу*.

Допустимым преобразованием пространства (X_m, B_p) называется совокупность преобразований, определяемых следующими соотношениями:

$$u^{i'} = f^{i'}(u^1, u^2, \dots, u^m), \quad (1)$$

причем $du^{i'} = p_i^{i'} du^i$, и

$$X_{a'} = A_a^{a'} X_a, \quad (2)$$

где $(A_a^{a'})$ — невырожденная матрица, элементы которой являются дифференцируемыми функциями координат u^i .

Промежуточным тензором мы будем называть величину, координаты которой преобразуются следующим образом:

$$w_{j'}^{i'} \dots_{b'}^{a'} = w_j^i \dots_b^a p_i^{i'} p_j^{j'} \dots A_a^{a'} A_{b'}^b, \quad (3)$$

где $(A_a^{a'})$ — матрица, обратная матрице $(A_a^{a'})$. Действия тензорной алгебры для промежуточных тензоров не отличаются от обычных, как мы это уже видели в § 37.

Рассмотрим объект, определяемый системой величин Γ_{ia}^b , которые преобразуются при преобразованиях (1), (2) так, что

$$\Gamma_{i'b}^a = p_{i'}^i \Gamma_{ia}^b, \quad (4)$$

$$\partial_i A_{a'}^a + \Gamma_{ib}^a A_{a'}^b - \Gamma_{ia'}^b A_b^a = 0. \quad (5)$$

Нетрудно убедиться, что эти требования равносильны утверждению, что для любого вектора V^a величины

$$\nabla_i V^a = \partial_i V^a + \Gamma_{ib}^a V^b \quad (6)$$

являются координатами связующего тензора, который мы будем называть *ковариантной производной вектора V^a* . Соответственно будем говорить, что они определяют *связность расслоенного пространства*. Условие

$$\delta V^a = \nabla_i V^a du^i = 0 \quad (7)$$

определяет параллельный перенос вектора V^a . Операция ковариантного дифференцирования и в этом случае подчинена всем правилам, установленным в главе III.

Повторное дифференцирование и альтернирование приводит нас к формулам

$$2\nabla_{[j}\nabla_{i]}V^a = R_{jib}^a V^b, \quad (8)$$

где

$$R_{jia}^b = \partial_j \Gamma_{ia}^b - \partial_i \Gamma_{ja}^b + \Gamma_{jc}^b \Gamma_{ia}^c - \Gamma_{ic}^b \Gamma_{ja}^c \quad (9)$$

— координаты *тензора кривизны*.

Рассуждения, подобные тем, которые приведены в § 33, позволяют вполне аналогичным образом записать формулы для альтернированных ковариантных производных тензоров любых валентностей.

Расслоение называется *касательным*, если $p = m$ и

$$A_{i'}^i = p_{i'}^i. \quad (10)$$

Обозначим его через $(X, B)_m$. Понятие связности с объектом Γ_{ia}^b совпадает с введенным в главе III.

Мы можем рассматривать одновременно два расслоения: (X_m, B_p) и $(X, B)_m$ с одной и той же базой. Если на каждом из них введена связность, то можно говорить о смешанном ковариантном дифференцировании промежу-

точных тензоров, полагая, например,

$$\nabla_j C_i^a = \partial_j C_i^a + \Gamma_{jb}^a C_i^b - \Gamma_{ji}^k C_k^a. \quad (11)$$

Допустим теперь, что в каждом слое пространства (X_m, B_p) выделены два линейно независимых векторных подпространства B_q и $B_{\bar{q}}$ так, что $q + \bar{q} = p$. Будем говорить в этом случае, что B_q разложено на прямую сумму этих пространств, и выражать это символической формулой

$$B_p = B_q + B_{\bar{q}}.$$

Назовем *приведенным* по отношению к данному разложению репер, векторы которого разбиты на две группы:

$$X_a \subset B_q, \quad a = 1, \dots, q; \quad X_{\bar{a}} \subset B_{\bar{q}}, \quad \bar{a} = q + 1, \dots, p,$$

а те линейные преобразования, которые не нарушают этого распределения, назовем *допустимыми*.

Матрица допустимого преобразования, очевидно, характеризуется условиями

$$A_{a'}^a = \bar{A}_{\bar{a}'}^{\bar{a}} = 0$$

или равносильными им

$$A_{\bar{a}}^{a'} = \bar{A}_a^{\bar{a}'} = 0.$$

Если в (X_m, B_p) задана связность Γ , то при допустимых преобразованиях уравнения (5) распадаются на следующие четыре группы:

$$\partial_i A_{a'}^a + \Gamma_{ib}^a A_{a'}^b - \Gamma_{ia'}^b A_b^a = 0, \quad (a)$$

$$\partial_i \bar{A}_{\bar{a}'}^{\bar{a}} + \Gamma_{i\bar{b}}^{\bar{a}} \bar{A}_{\bar{a}'}^{\bar{b}} - \Gamma_{i\bar{a}'}^{\bar{b}} \bar{A}_{\bar{b}}^{\bar{a}} = 0, \quad (b)$$

$$\Gamma_{ib}^{\bar{a}} A_{a'}^b - \Gamma_{ia'}^{\bar{a}'} \bar{A}_{\bar{a}'}^{\bar{a}} = 0, \quad (c)$$

$$\Gamma_{i\bar{b}}^a \bar{A}_{\bar{a}'}^{\bar{b}} - \Gamma_{i\bar{a}'}^{a'} A_{a'}^a = 0. \quad (d)$$

Первые две показывают, что при допустимых преобразованиях объекты Γ_{ia}^b и $\Gamma_{i\bar{a}}^{\bar{b}}$ определяют связности на многообразиях (X_m, B_q) и $(X_m, B_{\bar{q}})$ соответственно; будем говорить, что связность Γ приводится к ним на этих многообразиях.

При тех же преобразованиях объекты $\Gamma_{ia}^{\bar{b}}$ и $\Gamma_{i\bar{a}}^b$ являются промежуточными тензорами, как это следует из формул (с) и (d).

§ 55. Дифференцирование псевдовеличин

Рассуждения предыдущего параграфа не теряют смысла и для расслоенного пространства (X_m, B_1) , т. е. в том случае, когда слой имеет одно измерение.

При этом единственный вектор базиса X преобразуется так, что

$$X' = AX,$$

где A — дифференцируемая величина, отличная от нуля, а вектором следует считать величину с законом преобразования

$$V = AV'. \quad (1)$$

Связность определяется заданным ковектором Γ_j , для которого

$$\partial_i A + \Gamma'_i A - \Gamma_i A = 0,$$

или

$$\Gamma_i = \Gamma'_i + \partial_i \ln A. \quad (2)$$

Понятие валентности тензора заменяется в данном случае понятием веса. *Тензором веса q* называется величина v , преобразующаяся по закону

$$v = A^q v', \quad (3)$$

а его ковариантной производной следует считать тензор

$$\partial_i v + q \Gamma_i v. \quad (4)$$

Чтобы получить удобное обозначение для ковариантной производной в связности (X_m, B_1) , будем ставить число, соответствующее весу, в виде индекса *слева* от коренной буквы (*сверху*, если этот вес положительный, и *снизу*, если он отрицательный); при этом в случае нулевого веса индекс у коренной буквы отсутствует. Следуя такой системе обозначений, мы будем иметь, например,

$$\nabla_k^1 v = \partial_k v + \Gamma_k v, \quad \nabla_k {}_2 w = \partial_k w - 2 \Gamma_k w.$$

Легко видеть, что вес тензора сохраняется при его ковариантном дифференцировании. Складывать можно только тензоры одинакового веса, а перемножать — любые тензоры; при этом их веса складываются.

Очевидно, ковариантное дифференцирование подчиняется следующим правилам:

$$\nabla_k ({}^q v + {}^q w) = \nabla_k {}^q v + \nabla_k {}^q w, \quad (5)$$

$$\nabla_k ({}^p v {}^q w) = (\nabla_k {}^p v) w + v \nabla_k {}^q w. \quad (6)$$

При повторном дифференцировании и альтернировании имеют место формулы

$$2\nabla_{[j}\nabla_{i]} {}^p v = p\Omega_{ji}, \quad 2\nabla_{[j}\nabla_{i]} {}^q w = -q\Omega_{ji}, \quad (7)$$

где $\Omega_{ij} = \partial_{[j}\Gamma_{i]}$ есть тензор веса 0.

Для дальнейших приложений полезно посмотреть на предыдущее с другой точки зрения.

Величину V , преобразующуюся по закону (1), мы уже назвали в § 17 псевдовеличиной; ее преобразование (1) является перенормированием.

Считая V основной, будем называть величину v , перенормирующуюся по закону (3), спутником V , а q — ее весом. При этом условимся, что q не обязательно целое, а может быть любым действительным числом.

Величину

$$T_i = -\Gamma_i,$$

преобразующуюся по закону

$$T_i = T'_i + \partial_i \ln A, \quad (8)$$

будем называть *нормализатором* и говорить, что она задает *продолжение* класса псевдовеличин, перенормирующихся по формуле (3).

Вместо «ковариантное дифференцирование» будем говорить «*продолженное*».

Отметим, что для продолженного дифференцирования справедливы правила (5), (6), (7), где

$$\Omega_{ji} = -\partial_{[j}T_{i]} \quad (9)$$

— тензор веса 0, который мы будем называть *кривизной продолжения*.

Если в пространстве (X_m, B_p) заданы связности с объектами Γ_{ji}^k , Γ_{ja}^b и рассматриваются псевдотензоры веса p , q , то можно говорить и об их *продолженном ковариантном дифференцировании*, полагая

$$\nabla_i {}^p C_j^a = \nabla_i C_j^a - pT_i C_j^a, \quad \nabla_i {}^q D_j^a = \nabla_i D_j^a + qT_i D_j^a.$$

СВЯЗНОСТЬ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

§ 56. Кривые и поверхности проективного пространства

Кривая проективного пространства P_n есть множество точек этого пространства, определяемое уравнением

$$x = x(t), \quad (1)$$

где x — вектор соответствующего пространства B_{n+1} , заданный в виде дифференцируемой функции параметра t .

По основному свойству отображения P_n на B_{n+1} кривая, определяемая уравнением

$$\check{x} = \lambda(t) x(t), \quad (2)$$

совпадает с кривой (1). Переход от уравнения (1) к уравнению (2) называют *перенормированием* вектора x , считая при этом, что множитель перенормирования λ является дифференцируемой функцией параметра t .

Прямая MN называется *касательной* к кривой в ее точке M , если она является предельным положением секущей MM_1 , проходящей через точку M_1 кривой, неограниченно приближающуюся к точке M . Положение секущей MM_1 определяется заданием вектора точки M , т. е. $x(t)$, и вектора точки M_1 , т. е. $x_1 = x(t + \Delta t)$; однако вместо последней можно также взять такую точку N_1 , вектор которой

$$z = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Предполагая, что Δt стремится к нулю, и принимая во внимание соотношение

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} z = \frac{dx}{dt} = \dot{x},$$

мы видим, что касательная определяется точками x и $\dot{x}$, и ее уравнение имеет вид

$$y = x + \lambda \dot{x}. \quad (3)$$

Касательная остается неопределенной в том случае, если точка, определяемая вектором $\dot{x}$, совпадает с исходной точкой кривой, т. е. при условии линейной зависимости

$$\dot{x} + \alpha x = 0. \quad (*)$$

Если эта зависимость имеет место только в отдельно взятых точках кривой, то эти точки называются *особыми* и исключаются из рассмотрения. Если же зависимость (*) имеет место всюду в некоторой области изменения параметра t , то на нее можно смотреть как на линейное дифференциальное уравнение, интегрируя которое мы получим выражение

$$x = cf(t),$$

где c — постоянный вектор. Но в таком случае точка, определяемая вектором x , остается неподвижной при изменении t , и кривая (1) вырождается в точку.

Соприкасающейся плоскостью кривой называется предельное положение плоскости, проходящей через три бесконечно сближающиеся точки этой кривой. Определение, равносильное данному, характеризует соприкасающуюся плоскость как предельное положение плоскости, проходящей через касательную прямую и точку кривой x_1 , неограниченно приближающуюся к точке прикосновения x .

Чтобы определить положение соприкасающейся плоскости кривой (1), рассмотрим плоскость, проходящую через три точки: x , $\dot{x}$ и

$$x_1 = x(t + \Delta t) = x(t) + \dot{x}(t) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}(t) \Delta t^2 + \varepsilon_3,$$

где ε_3 есть вектор, порядок малости которого выше, чем порядок малости Δt^2 . Составляя линейную комбинацию рассматриваемых точек, мы можем определить ту же плоскость точками

$$x, \dot{x}, \ddot{x} + \varepsilon,$$

где ε есть вектор, стремящийся к нулю вместе с Δt . Таким образом, точка соприкасающейся плоскости определится вектором

$$y = \lambda x + \mu \dot{x} + \nu \ddot{x}. \quad (4)$$

Соприкасающаяся плоскость становится неопределенной при условии

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = 0. \quad (5)$$

Если это условие имеет место в некоторой области изменения параметра t , то, рассматривая его как дифференциальное уравнение и интегрируя, мы получим для x выражение

$$x = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t),$$

которое показывает, что линия, соприкасающаяся плоскость которой остается неопределенной во всех ее точках, — прямая.

Поверхность X_m m измерений проективного пространства есть множество точек x этого пространства, зависящих от m параметров или криволинейных координат $u^1, u^2, \dots, u^m$. Эта зависимость

$$x = x(u^1, u^2, \dots, u^m) \quad (6)$$

есть параметрическое уравнение поверхности; здесь x — дифференцируемая функция параметров $u^1, \dots, u^m$.

Так как вектор x , представляющий точку проективного пространства, определен с точностью до множителя, то уравнение

$$\check{x} = \lambda(u^1, u^2, \dots, u^m) x \quad (7)$$

представляет ту же поверхность. Переход от уравнения (6) к уравнению (7), где λ есть дифференцируемая функция параметров $u^1, \dots, u^m$, тоже будем называть *перенормированием* вектора x .

Введем координаты точки x и обозначим их через x^α , полагая теперь и в дальнейшем, что греческие индексы всюду пробегают значение от 1 до $n+1$; рассмотрим

матрицу

$$\left\| \begin{array}{ccc} x^1 & \dots & x^{n+1} \\ \partial_1 x^1 & \dots & \partial_1 x^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_m x^1 & \dots & \partial_m x^{n+1} \end{array} \right\|. \quad (8)$$

Принимая во внимание, что при перенормировании производные преобразуются по правилу

$$\partial_i \check{x}^\alpha = \partial_i \lambda x^\alpha + \lambda \partial_i x^\alpha, \quad i = \overline{1, m}, \quad (9)$$

легко видеть, что ранг матрицы (8) не изменяется при перенормировании.

Определив нормирование условием

$$\Omega_\alpha x^\alpha = 1,$$

где Ω_α — координаты гиперплоскости, и приняв эту гиперплоскость за координатную, т. е. положив, например, $\Omega_1 = \Omega_2 = \dots = \Omega_n = 0$, $\Omega_{n+1} = 1$, мы получим, что $x^{n+1} = 1$, $\partial_i x^{n+1} = 0$. Поэтому ранг матрицы (8) будет на единицу выше ранга матрицы

$$\|\partial_i x^\sigma\|, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sigma = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Считая гиперплоскость Ω_α несобственной, мы можем рассматривать x^σ как координаты радиуса-вектора точки аффинного пространства. В § 15 было показано, что параметры будут независимы только в том случае, если ранг матрицы (10) $\rho_1 = m$ и, следовательно, ранг матрицы (8) $\rho = m + 1$. Конечно, следует иметь в виду (так же как и в § 15), что это условие может нарушаться в отдельных точках поверхности. Будем по-прежнему называть эти точки *особыми* и исключать их из рассмотрения.

Что касается неособых точек, то в них вследствие того, что $\rho = m + 1$, точки x и $\partial_i x$ независимы и, значит, определяют плоскость m измерений, которую мы будем называть *касательной плоскостью* поверхности X_m и обозначать T_m . Если на X_m задана кривая $u^i = u^i(t)$, то ее касательная прямая определяется точками x и $\frac{\partial x}{\partial t} =$

$$= \partial_i x \frac{\partial u^i}{\partial t}, \quad \text{и, значит, эта прямая принадлежит } T_m.$$

Таким образом, так же как и в аффинном пространстве,

касательная плоскость поверхности X_m проективного пространства есть множество касательных прямых всех линий, принадлежащих X_m и проходящих через неособую точку прикосновения T_m к X_m .

§ 57. Нормализованные поверхности проективного пространства

В § 38 мы отметили возможность интерпретации любой геометрии аффинной связности с кручением, равным нулю, как связности, индуцированной на поверхности аффинного пространства. Эта возможность была основана на том, что, задавая «оснащение» поверхности X_m , т. е. связывая с каждой ее точкой некоторую плоскость $n - m$ измерений, мы определяли «внутреннюю» геометрию на X_m , которая является самой общей геометрией A_m без кручения.

В этой главе мы рассмотрим более общий способ интерпретации произвольной связности A_m как связности, индуцируемой на поверхности X_m проективного пространства. При этом, однако, нам придется расширить понятие оснащения, задавая, кроме нормализующей плоскости $n - m$ измерений, проходящей через точку поверхности, еще нормализующую плоскость $m - 1$ измерения, которая лежит в касательной плоскости поверхности, но не проходит через точку прикосновения. Задание такого проективного оснащения, или нормализации, может рассматриваться как обобщение аффинного оснащения, в случае которого мы можем считать, что нормализующее многообразие второго рода лежит в несобственной гиперплоскости.

Перейдем теперь к систематическому изложению намеченной схемы. Рассмотрим m -мерную поверхность X_m , погруженную в n -мерное проективное пространство P_n . Пусть x — точка этой поверхности, T_m — плоскость, касающаяся X_m в точке x .

Будем называть X_m проективно-нормализованной или оснащенной и обозначать через $N(X_m)$, если каждой ее точке x отнесены два линейных многообразия:

- 1) P_{n-m} , проходящее через точку x , но не имеющее с T_m других общих точек;
- 2) P_{m-1} , расположенное в T_m , но не проходящее через точку x .

Будем называть эти многообразия *нормализующими многообразиями* или *нормальями* $N(X_m)$ первого и второго родов соответственно, обозначая нормали первого рода через P_I , а нормали второго рода через P_{II} . При этом мы будем предполагать, что нормали в соответствующих точках поверхности задаются с помощью функций от параметров точки поверхности, дифференцируемых нужное нам число раз.

Обратимся теперь к способам этого задания. Положение P_I вполне определится, если векторы $p = n - m + 1$ точек X_a , $a = \overline{0, p}$, принадлежащих P_I и образующих систему независимых точек, заданы как функции u^i . Эти точки мы будем называть *вершинами нормали первого рода* и будем иметь в виду, что, не меняя P_I , можно заменить каждую из них произвольной линейной комбинацией этих точек при единственном условии сохранения их независимости.

Для определения положения P_{II} , т. е. нормали второго рода, примем во внимание, что она принадлежит касательной плоскости T_m и является гиперплоскостью этого m -мерного проективного пространства, не проходящей через точку x . Поэтому всякая прямая, исходящая из точки x и лежащая в T_m , должна пересечь P_{II} в некоторой точке. Рассмотрим прямые, определяемые точками x , $\partial_i x$, т. е. касающиеся координатных линий на X_m . Пусть эти прямые пересекают P_{II} в точках

$$y_i = \partial_i x - l_i x, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1)$$

Так как ранг матрицы (56,8) равен $m + 1$, то все эти точки, называемые *опорными*, независимы между собою и их задание вполне определяет P_{II} .

Пользуясь этим способом задания P_{II} , мы сводим его к заданию m скалярных величин l_i , выбор которых, очевидно, связан как с выбором системы криволинейных координат на поверхности, так и с нормированием вектора x , определяющего точку поверхности.

Выясним теперь, как должны преобразовываться эти величины при преобразовании координат и при перенормировании, если нормаль второго рода неизменна. Можно считать, что при преобразовании криволинейных координат величины l_i преобразуются как компоненты

ковариантного тензора, т. е.

$$l_i = l_{i'} p_i^{i'}, \quad (2)$$

где $p_i^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$. В этом случае

$$y_i = y_{i'} p_i^{i'}. \quad (3)$$

Таким образом, опорные точки y_i комбинируются *линейно*, и, следовательно, P_{II} не изменяется. Заметим также, что при этом величины y_i образуют *тензор с векторными компонентами*.

Потребуем также, чтобы при перенормировании

$$\check{x} = \lambda x \quad (4)$$

нормаль второго рода P_{II} также не изменялась. В силу (56,7) имеем

$$\check{y}_i = \partial_i \check{x} - \check{l}_i \check{x} = \lambda [\partial_i x - (\check{l}_i - \partial_i \ln \lambda) x].$$

Так как P_{II} не меняется, то $\check{y}_i = \lambda y_i$, откуда следует, что

$$\check{l}_i = l_i + \partial_i \ln \lambda, \quad (5)$$

т. е. l_i является нормализатором в смысле § 55. Векторы y_i будут теперь продолженными производными от x , определенными нормализатором l_i . Мы можем записать

$$y_i = \nabla_i {}^1x = {}^1x_i.$$

При этом

$${}^1\check{x}_i = \lambda {}^1x_i, \quad (6)$$

что обеспечивает неизменность нормали второго рода при перенормировании точки x . Это обстоятельство позволяет интерпретировать векторы и ковекторы аналитического пространства криволинейных координат $N(X_m)$.

Всякому контравариантному вектору v^i этого пространства можно отнести точку

$$v = v^i y_i, \quad (7)$$

расположенную на нормали второго рода. Вследствие тензорного характера y_k , а также вследствие свойства

нормирования эта точка инвариантно связана с выбором направления вектора ν^k . Будем говорить, что ν есть *нормальная точка* данного направления.

Всякому ковариантному вектору h_k можно отнести некоторую P_{m-1} , расположенную в T_m , определив ее m точками

$$z_i = y_i + h_i x. \quad (8)$$

Опять-таки благодаря тензорному характеру всех входящих в это выражение величин и вследствие условий перенормирования эта P_{m-1} определяется однозначно. Обратно: для всякой P_{m-1} , расположенной в T_m , векторы, определяющие точки z_i , расположенные в данной T_m , определяются единственным образом. Очевидно, вектору $h_i = 0$ соответствует P_{m-1} , совпадающая с P_Π *).

Можно также встать и на следующую точку зрения. Будем считать x полюсом, а P_Π — несобственной гиперплоскостью центраффинного пространства T_m . Всякую точку T_m можно тогда задать вектором

$$z = x + z^i y_i,$$

где z^i — ее декартовы координаты. Если эта точка принадлежит P_{m-1} , определенной точками (8), то

$$z = x + z^i y_i = \lambda^k (y_k + h_k x),$$

откуда $\lambda^k = z^k$ и

$$z^k h_k = 1. \quad (9)$$

Следовательно, h_k являются *центраффинными координатами* P_{m-1} , определенной точками (8), если точка поверхности x принята за центр, а нормаль второго рода — за несобственную гиперплоскость пространства T_m .

§ 58. Внутренняя связность нормализованной поверхности

Задание репера X_a на многообразии точек поверхности X_m определяет расслоение (X_m, B_{n-m+1}) , которое мы будем называть *нормальным*.

*) Так как $\bar{P}_{m-1}$, определенная точками (8), не проходит через x , то ее можно принять за нормаль второго рода. Поэтому ее удобно будет называть *виртуальной нормалью второго рода*.

Векторы y_i и X_a определяют базис проективного пространства, и всякая его точка может быть представлена линейно через векторы этого базиса.

Рассмотрим разложение второй продолженной производной:

$$\partial_j {}^1y_i = \Gamma_{ji}^k y_k + b_{ji}^a X_a. \quad (a)$$

При преобразовании координат

$$\begin{aligned} \partial_{j'} {}^1y_{i'} &= \partial_{j'} (p_i^k {}^1y_k) = \partial_{j'} p_i^k {}^1y_k + p_j^j p_i^i \partial_j {}^1y_i = \\ &= \partial_{j'} p_i^k y_k + p_i^i p_j^j (\Gamma_{ji}^k y_k + b_{ji}^a X_a) = \Gamma_{j'i}^{k'} p_k^k y_k + b_{j'i}^{a'} X_a. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при соответствующих векторах, получим

$$\begin{aligned} \partial_{j'} p_i^k + p_i^i p_j^j \Gamma_{ji}^k - \Gamma_{j'i}^{k'} p_k^k &= 0, \\ b_{j'i}^{a'} &= p_i^i p_j^j b_{ji}^a. \end{aligned}$$

Следовательно, Γ_{ji}^k является объектом связности касательного расслоения $(X, B)_m$. Эту связность мы будем называть *внутренней связностью* нормализованной поверхности. Она не зависит от нормирования x , так как вес Γ_{ij}^k равен нулю. Кроме того, очевидно, величины b_{ij}^a определяют промежуточный тензор расслоения (X_m, B_{n-m+1}) .

Из (a), альтернируя и пользуясь (56,7), получим

$$\Omega_{ji} x = \Gamma_{[ji]}^k y_k + b_{[ji]}^a X_a.$$

Но x принадлежит P_I , поэтому можно положить

$$x = x^a X_a \quad a = \overline{0, p}, \quad (1)$$

и, сравнивая коэффициенты, мы получаем

$$b_{[ji]}^a = x^a \Omega_{ji}, \quad (2)$$

$$\Gamma_{[ji]}^k = 0. \quad (3)$$

Таким образом, *внутренняя связность* $N(X_m)$ лишена кручения.

Пользуясь символом ковариантного дифференцирования во внутренней связности, запишем уравнение (a) в виде

$$\nabla_j y_i = l_j y_i + b_{ji}^a X_a. \quad (4)$$

Чтобы установить смысл параллельного перенесения вектора во внутренней связности, отнесем любому псевдовектору v^i нормальную точку

$$v = v^i y_i. \quad (5)$$

Дифференцируя и пользуясь уравнением (4), получим

$$dv = \delta v^i y_i + l_j du^j x + b_{ji}^a du^j v^i X_a.$$

Условие параллельного переноса направления v^i

$$\delta v^i = \lambda v^i$$

равносильно соотношению

$$dv = \lambda v + \mu^a X_a; \quad (6)$$

следовательно, для того чтобы направление вектора переносилось параллельно во внутренней связности, необходимо и достаточно, чтобы нормальная точка этого направления смещалась по прямой, пересекающей нормаль первого рода.

Рассмотрим геодезическую линию внутренней связности, положив

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

В этом случае уравнение (6) примет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = v \frac{dx}{dt} + \mu^a X_a.$$

Так как точка кривой x принадлежит нормали первого рода, то геодезическая линия внутренней связности характеризуется тем, что ее соприкасающаяся плоскость пересекает нормаль первого рода по прямой или становится неопределенной.

Отсюда вытекает также, что всякая прямая линия, принадлежащая поверхности, является геодезической внутренней связностью при любой нормализации.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\partial_j X_a = \Gamma_{ja}^b X_b + C_{ja}^k y_k. \quad (b)$$

Рассуждая так же, как и для (a), мы придем к следующим выводам;

1. Объект Γ_{ja}^b определяет связность в расслоенном пространстве (X_m, B_{n-m+1}) ; будем называть ее *внешней связностью*.

2. Величины C_{ia}^k являются координатами промежуточного псевдотензора веса $q = -1$.

Пользуясь определением внешней связности и вводя соответствующее ковариантное дифференцирование, можно представить уравнение (b) в виде

$$\nabla_j X_a = C_{ja}^k y_k. \quad (7)$$

Пользуясь этим уравнением, из (1) получим

$$\nabla_j x^a = 0, \quad (8)$$

$$C_{ia}^j x^a = \delta_i^j. \quad (9)$$

§ 59. Подчиненная нормализация

Предположим, что в нормализованной X_m взята некоторая X_p , $p < m$. Будем говорить, что *нормализация X_p подчинена нормализации X_m* , если нормаль первого рода X_p содержит нормаль первого рода X_m , а нормаль второго рода X_p содержится в нормали второго рода X_m .

Воспользовавшись обозначениями § 38 и предположив, что уравнения X_m и X_p имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x &= x(u^\alpha), & \alpha &= 1, \dots, m, \\ u^\alpha &= u^\alpha(u^i), & i &= 1, \dots, p, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

получим, что опорная точка P_{II} для $N(X_p)$ связана с опорными точками для $N(X_m)$ зависимостями

$$y_i = x_i^\alpha y_\alpha. \quad (2)$$

Нормаль первого рода X_p можно задать, присоединив к X_s — вершинам нормали X_m — еще $m - p$ точек, независимых от предыдущих. Эти последние точки можно выбрать так, чтобы они лежали в T_m и представлялись векторами

$$X_t = X_t^\alpha y_\alpha, \quad t = n - m, \dots, n - p. \quad (3)$$

Применяя уравнение (58,4) к обоим нормализованным

поверхностям, для любой нормальной точки получим

$$v = v^\alpha y_\alpha = v^i y_i, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} dv &= \delta v^i y_i + l_k du^k v + \lambda x + \mu^s X_s + v^t X_t = \\ &= \delta v^\alpha y_\alpha + l_b du^b v + \lambda' x + \mu^s X_s. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при соответствующих векторах и имея в виду, что вследствие (2)

$$l_i du^i = l_\alpha dx^\alpha, \quad (5)$$

будем иметь

$$\delta v^i y_i + v^t X_t = \delta v^\alpha y_\alpha,$$

или

$$\delta v^\alpha = x_i^\alpha \delta v^i + v^t X_t^\alpha.$$

Отсюда следует, что условия параллельного переноса вектора v^i во внутренней геометрии X_p таковы:

$$\delta v^\alpha = v^t X_t^\alpha, \quad (6)$$

а это показывает, что внутренняя связность X_p индуцирована оснащением, определяемым направлениями векторов X_t^α .

Итак, если нормализация X_p подчинена нормализации X_m , то ее внутренняя связность индуцируется внутренней связностью X_m с помощью тех направлений, по которым нормаль первого рода X_p пересекает касательную плоскость X_m .

§ 60. Основные уравнения нормализованной поверхности

Рассмотрим совместно уравнения

$$\left. \begin{aligned} y_i &= \nabla_i^1 x, & (A) \\ \nabla_j^1 y_i &= b_{ji}^a X_a, & (B) \\ \nabla_j X_a &= C_{ja}^k y_k, & (C) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

которые мы будем называть основными деривационными уравнениями нормализованной поверхности.

Составим условия интегрируемости этих уравнений, для чего будем дифференцировать ковариантно их левые и правые части и результат альтернировать по индексам дифференцирования.

Принимая во внимание, что левые части уравнений (1B) и (1C) имеют вес 1 и 0 соответственно, заменяя производные векторов в левых частях их разложениями и сравнивая коэффициенты при соответствующих независимых векторах, мы получим *)

$$\left. \begin{aligned} & b_{[ji]}^a = \Omega_{ji} x^a, & (I) \\ & \nabla_i^1 x^a = 0; & (II) \end{aligned} \right\} (A) \\
 \left. \begin{aligned} & R_{kji}^m = -2C_{a[k}^m b_{j]i}^a, & (I) \\ & \nabla_{[k}^1 b_{j]i}^a = 0; & (II) \end{aligned} \right\} (B) \\
 \left. \begin{aligned} & R_{kja}^b = -2C_{a[j}^m b_{k]m}^b, & (I) \\ & \nabla_{[k}^1 C_{j]a}^m = 0. & (II) \end{aligned} \right\} (C) \end{aligned} \quad (2)$$

Теперь может быть сформулирована следующая теорема: *нормализованная поверхность X_m определяется с точностью до проективного преобразования заданием объектов двух связностей: Γ_{ij}^k в касательном расслоении и Γ_{ia}^b в нормальном расслоении (X_m, B_{n-m+1}) , а также двух тензоров: b_{ij}^a и C_{ia}^b с весом 1 и -1 соответственно, если вторая связность допускает существование вектора x^a веса 1 и если при этом удовлетворяются условия (2).*

Заметим, что при составлении уравнений (1) мы пользуемся продолженным дифференцированием и должны знать его нормализатор. Но этот нормализатор определяется из уравнений

$$\Omega_{ij}^a = b_{[ji]}^a$$

с точностью до преобразования

$$l_i = l'_i + \partial_i \ln \lambda, \quad (3)$$

соответствующего произволу в выборе нормировки вектора x точки поверхности.

Выбор вершин нормали первого рода можно специализировать, положив

$$X_0 = x.$$

*) Для удобства написания формул будем считать, что разнородные индексы (например, a и i) можно переставлять как угодно.

Тогда остальные $n - m$ вершин X_a , $a = \overline{1, n - m}$, определяют плоскость P_{n-m-1} , которую мы будем называть *опорной плоскостью* нормали первого рода. Если эта плоскость фиксирована, то на нормализацию наложено новое дополнительное условие, и мы будем называть такую нормализацию *сильной*.

Точки X_a , принадлежащие опорной плоскости, допускают преобразование вида

$$X_{a'} = B_a^a X_a, \quad a = \overline{1, n - m}, \quad (4)$$

и мы можем рассмотреть новое расслоенное пространство (X_m, B_{n-m}) .

Запишем уравнение (1C) в виде

$$\partial_i X_a - \Gamma_{ia}^b X_b - \Gamma_{ia}^0 x = C_{ia}^k y_k,$$

или, опуская индекс 0,

$$\partial_i X_a - \Gamma_{ia}^b X_b = C_{ia}^k y_k + \Gamma_{ia} x. \quad (5)$$

Очевидно, при преобразовании (4) и при $x' = x$ величины Γ_{ia} , как и C_{ia}^k , определяют тензоры, так что правые части уравнений (5) носят тензорный характер, а объект Γ_{ja}^b , $a, b = \overline{1, n - m}$, определяет новую приведенную связность, которую мы назовем *опорной* (§ 55).

Пользуясь дифференцированием в этой связности и введя обозначения $b_{ij}^0 = p_{ij}$, перепишем основные уравнения в следующем *приведенном* виде:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_j {}^1 y_i &= p_{ji} x + b_{ji}^a X_a, & (B) \\ \nabla_j X_a &= C_{ja}^k y_k + \Gamma_{ja} x. & (C) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Кроме того, мы имеем уравнение

$$\partial_j x - l_j x - \Gamma_{j0}^a X_a - \Gamma_{ja}^0 x = C_{ja}^k y_k,$$

которое приводит к соотношениям

$$\Gamma_{j0}^a = \Gamma_{ja}^0 = 0, \quad C_{j0}^k = \delta_j^k.$$

Легко видеть, что условия интегрируемости приведенных уравнений сводятся к следующим:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} & b_{[ji]}^a = 0, & (I) \\ & p_{[ji]} + \nabla_{[j} l_{i]} = 0; & (II) \end{aligned} \right\} & (A) \\
 & \left. \begin{aligned} & R_{kji}^m = 2p_{[kj]} \delta_i^m - 2\delta_{[k}^m p_{j]i} - 2b_{i[j}^a C_{k]a}^m, & (I) \\ & \nabla_{[k} b_{j]i}^a = 0, & (II) \\ & \nabla_{[k} p_{j]i} + b_{i[j}^a C_{k]a}^m = 0; & (III) \end{aligned} \right\} & (B) \\
 & \left. \begin{aligned} & \nabla_{[j} C_{i]a}^k + \Gamma_{a[i} \delta_{j]}^k = 0, & (I) \\ & \nabla_{[j} \Gamma_{i]a} + C_{a[i} p_{j]k} = 0, & (II) \\ & R_{jia}^b + 2C_{a[i}^k b_{j]k}^b = 0. & (III) \end{aligned} \right\} & (C)
 \end{aligned} \tag{7}$$

§ 61. Замена нормализации

В этом параграфе мы выясним, как преобразуются некоторые величины, характеризующие нормализованную поверхность, при замене нормализации.

Предположим сначала, что нормаль первого рода $N(X_m)$ остается неизменной, а за нормаль второго рода принимаются такие P_{m-1} , опорные точки которых связаны со старыми опорными точками соотношениями

$$\bar{y}_i = y_i + h_i x. \tag{1}$$

Согласно § 57, h_i есть ковариантный вектор, который мы и будем называть *вектором преобразования нормали второго рода*.

Подставляя вместо опорных точек их выражения (57,1), мы будем иметь связь между нормализаторами, соответствующими старой и новой нормализации:

$$\bar{l}_i = l_i - h_i. \tag{2}$$

Так как, согласно § 58, геодезические линии внутренней связности вполне характеризуются тем, что их соприкасающиеся плоскости пересекают нормали первого рода, а эти нормали остаются неизменными, то *внутренняя геометрия $N(X_m)$ испытывает при замене нормалей второго рода преобразование, которое сохраняет геодезические линии, т. е. проективное преобразование*.

Отсюда следует, что коэффициенты новой и старой внутренней связности находятся в зависимости (46,2), т. е.

$$\bar{G}_{ij}^k = G_{ij}^k + \delta_i^k p_j + \delta_j^k p_i, \quad (3)$$

так что

$$\bar{\nabla}_j \bar{y}_i = \nabla_j \bar{y}_i - (\delta_i^k p_j + \delta_j^k p_i) \bar{y}_k.$$

Но

$$\nabla_j y_i = l_j y_i + p_{ji} x + b_{ij}^s X_s, \quad \bar{\nabla}_j \bar{y}_i = \bar{l}_j \bar{y}_i + \bar{p}_{ji} x + b_{ij}^s X_s,$$

причем последние слагаемые в обоих случаях одинаковы вследствие неизменности нормалей первого рода.

С другой стороны, из (1) следует, что

$$\nabla_j \bar{y}_i = \nabla_j y_i + h_i (y_j + l_j x) + \nabla_j h_i x,$$

откуда

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_j \bar{y}_i &= (l_j - h_j) (y_i + h_i x) + \bar{p}_{ji} x = l_j y_i + p_{ji} x + \\ &+ h_i (y_j + l_j x) + \nabla_j h_i x - p_j (y_i + h_i x) - p_i (y_j + h_j x), \end{aligned}$$

и, сравнив коэффициенты, мы получим

$$p_i = h_i, \quad (4)$$

$$\bar{p}_{ji} = p_{ji} + \nabla_j h_i - h_i h_j. \quad (5)$$

Итак, при замене нормали второго рода и сохранении нормали первого рода внутренняя геометрия поверхности преобразуется проективно, причем вектор этого проективного преобразования равен вектору преобразования нормали.

Ввиду того, что вектор преобразования h_i совершенно произволен, мы имеем такое следствие: если некоторая аффинная связность может служить внутренней связностью нормализованной поверхности, то всякую другую связность, находящуюся с данной в геодезическом соответствии, можно реализовать на той же поверхности, преобразуя соответствующим образом нормали второго рода.

Преобразование нормали первого рода можно охарактеризовать выбором новых вершин, которые можно задать следующим образом:

$$\bar{X}_a = \lambda_a x + \lambda_a^k y_k + \lambda_a^b X_b. \quad (6)$$

Подставляя эти выражения в основные уравнения (60, В), мы отметим только формулы для преобразования тензора p_{ji} :

$$p_{ji} = \bar{p}_{ji} + \lambda_s b_{ij}^s. \quad (7)$$

Заметим, что тот же вид сохраняют эти формулы и в случае, когда $\lambda_s^k = 0$, т. е. нормаль первого рода не меняется, а изменяется только положение ее вершин.

Альтернируя (7) и имея в виду симметрию b_{ij}^s , мы получим

$$p_{[ji]} = \bar{p}_{[ji]}. \quad (8)$$

Отсюда следует, в частности, что факт симметрии тензора p_{ji} не зависит от выбора нормалей первого рода, т. е. характеризует особое расположение нормалей второго рода относительно поверхности.

Нормали второго рода образуют m -мерное многообразие $(m - 1)$ -мерных плоскостей, причем каждая из плоскостей этого многообразия соответствует некоторой точке поверхности X_m и находится в касательной плоскости T_m в этой точке.

Если такое многообразие X_m^{m-1} обладает тем свойством, что, приняв его плоскости за нормали второго рода $N(X_m)$, мы придем к симметричному тензору p_{ji} , то про многообразие X_m^{m-1} говорят, что оно *гармонично поверхности*. К вопросу о геометрическом значении гармоничности мы еще вернемся при рассмотрении важнейших частных случаев нормализованных поверхностей.

Условие

$$p_{[ji]} = 0 \quad (9)$$

равносильно, вследствие (65, 7А2), тому, что нормализатор l_i является градиентом. Если оно выполнено, то, принимая во внимание закон (57, 5) преобразования нормализатора при перенормировании, мы можем, полагая $\lambda = \exp \int l_k du^k$, добиться выполнения соотношения

$$l_i = 0, \quad (10)$$

которое определяет *каноническое нормирование поверхности*, если многообразие X_m^{m-1} нормалей второго рода гар-

монично поверхности. Для канонического нормирования

$$y_i = \partial_i x,$$

так что всякое X_{m-1}^m нормалей второго рода, гармоничное поверхности X_m , отвечает каноническому нормированию поверхности, при котором опорные точки определяются производными от x по криволинейным координатам.

§ 62. Нормализованное пространство

Понятие $N(X_m)$ не теряет смысла, а все полученные нами результаты сохраняют силу и в том случае, когда $m = n$, т. е. нормализуемое многообразие является n -мерной областью проективного пространства P_n . Следует только учесть, что в этом случае отпадает необходимость рассмотрения нормали первого рода, а нормаль второго рода оказывается гиперплоскостью.

Таким образом, задание нормализованного пространства $N(P_n)$ равносильно заданию дифференцируемого соответствия между точками x и гиперплоскостями, не проходящими через эти точки и играющими роль нормалей второго рода. Соответствие такого типа называется *двойственным*.

Основные уравнения для $N(P_n)$ сводятся к двум:

$$\left. \begin{aligned} y_i &= \partial_i x - l_i x, & (A) \\ \nabla_j y_i &= l_j y_i + p_{ji} x, & (B) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

а условие (58,6) параллельного перенесения вектора во внутренней связности имеет вид

$$dv = \lambda v + \mu x, \quad (2)$$

который показывает, что плоскость смещения точки оказывается неопределенной. Иначе говоря, для того чтобы направление переносилось параллельно во внутренней связности $N(P_n)$, необходимо и достаточно, чтобы нормальная точка, соответствующая этому направлению, смещалась по прямой, соединяющей ее с точкой x .

Неопределенность плоскости смещения сводится для геодезической линии к неопределенности соприкасающейся плоскости — факту, который характеризует прямую. Таким образом, геодезические линии внутренней связности $N(P_n)$ совпадают с прямыми P_n .

Отсюда непосредственно следует, что *внутренняя связность* $N(P_n)$ *проективно-евклидова*, причем самого общего вида, так как, меняя расположение нормалей второго рода, можно подвергнуть данную связность любому проективному преобразованию (§ 61), т. е. перейти ко всякой другой связности такого типа.

Имея это в виду, мы можем сформулировать следующую теорему: *для того чтобы аффинная связность без кручения была проективно-евклидовой, необходимо и достаточно, чтобы она могла быть внутренней связностью нормализованного пространства.*

Условия интегрируемости основных уравнений для $N(P_n)$ сводятся к трем следующим:

$$\left. \begin{array}{ll} R_{[ji]} + \nabla_{[j} l_{i]} = 0, & \text{(II) (A)} \\ R_{kji}^m = 2p_{[kj]} \delta_i^m - 2\delta_{[k} p_{j]i}, & \text{(I) } \left. \begin{array}{l} \text{(B)} \\ \text{(III)} \end{array} \right\} \\ \nabla_{[k} p_{j]i} = 0. & \end{array} \right\} \quad (3)$$

Последние два из условий (3) совпадают с условиями (47,1) и (47,3)*), необходимыми и достаточными для того, чтобы пространство было проективно-евклидовым, и мы имеем, таким образом, новый вывод последних.

Так как при свертывании (3BI) мы получим соотношения (47,5), согласно которым

$$p_{kj} = - \frac{nR_{jk} + R_{kj}}{n^2 - 1}, \quad (4)$$

то p_{kj} , а следовательно, и все коэффициенты основных уравнений определяются заданием внутренней связности. Это значит, что *нормализация проективного пространства определится с точностью до проективного преобразования заданием своей внутренней проективно-евклидовой связности.*

По-прежнему будем называть соответствие между x и P_{II} *гармоническим*, если p_{ji} симметрично. Так как вследствие (4) эта симметрия равносильна симметрии тензора Риччи, то, принимая во внимание результат § 41, мы приходим к следующему положению: *для того чтобы связность была эквипроективной (§ 47), необходимо и достаточно, чтобы она была внутренней связностью*

*) С различием в знаке p_{jk} .

гармонического соответствия между точками $N(P_n)$ и нормализующими гиперплоскостями.

Отметим одну возможность построения гармонического соответствия. Пусть

$$f(x) = f(x^1, x^2, \dots, x^{n+1}) = f(x^\alpha), \quad (5)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n+1,$$

есть однородная функция проективных координат точки x^α . Пользуясь этой функцией, можно отнести всякой точке гиперплоскость с координатами соответствующего ко вектора

$$\xi_\alpha = \partial_\alpha f(x) = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, n+1. \quad (6)$$

Если $f(x)$ есть многочлен, то гиперплоскость ξ называется *первой полярной точки x* относительно алгебраической гиперповерхности $f(x) = 0$.

Рассмотрим соответствие между полюсами и первыми полярами. Пронормировав x так, чтобы иметь для всех точек, не принадлежащих гиперповерхности,

$$f(x) = c = \text{const}, \quad (7)$$

и вводя криволинейные координаты u^i ($i = 1, 2, \dots, n$) точки x , мы получим после дифференцирования

$$\partial_i f = \xi_\alpha \partial_i x^\alpha = \xi \partial_i x = 0.$$

Это равенство показывает, что если первую полярную точки x принять за P_{II} , то опорные точки, определяющие ее положение, $y_i = \partial_i x$, а это значит, что *полярное соответствие будет гармоническим, а нормирование, определенное равенством (7), — каноническим.*

В частности, если $f(x) = \xi x$, где $\xi = \text{const}$, то всем точкам P_n ставится в соответствие одна гиперплоскость ξ .

Дифференцируя тождество $\xi \partial_i x = 0$ вторично и применяя ковариантное дифференцирование внутренней связности, мы получим

$$\nabla_j (\partial_i x \xi) = p_{ji} x \xi = p_{ji} c = 0,$$

откуда $p_{ji} = 0$, а следовательно, согласно (ЗВІ) $R_{ijk}^m = 0$ и внутренняя связность будет евклидовой *).

*) Относительно того случая, когда $f(x)$ есть квадратичная функция x , см. § 75.

Продолжая рассмотрение этого случая, примем во внимание, что условие параллельного переноса требует, чтобы нормальная точка v смещалась по прямой, соединяющей ее с точкой x . Если нормализующая гиперплоскость ξ неподвижна, то точка v должна оставаться в этой гиперплоскости, что возможно только при условии неподвижности самой точки. Приняв ξ за несобственную гиперплоскость аффинного пространства, мы видим, таким образом, что несобственная точка, соответствующая направлению, переносимому параллельно во внутренней связности $N(P_n)$, остается неподвижной, а следовательно, направление переносится параллельно и в смысле аффинно-евклидовой геометрии.

Итак, *внутренняя связность проективного пространства, нормализованного гиперплоскостью, не зависящей от положения соответствующей точки x , есть связность аффинного пространства, для которого эта гиперплоскость является несобственной.*

Все приведенные результаты можно обратить по принципу двойственности, принимая за элемент пространства P_n гиперплоскость ξ , а за нормализующее многообразие — точку x или, вернее говоря, связку Π_{n-1} с центром в этой точке. Всякому соответствию будет, по предыдущему, отвечать некоторая проективно-евклидова геометрия. Если соответствие взаимно однозначно *), то можно построить две такие геометрии, рассматривая соответствие $x \rightarrow \xi$ и двойственное ему соответствие $\xi \rightarrow x$. Выясним связь между этими геометриями. Для этого рассмотрим наряду с уравнениями (1), характеризующими соответствие $x \rightarrow \xi$, уравнения

$$\eta_i = \partial_i \xi - \lambda_i \xi, \quad \nabla_j \eta_{(i)} = \lambda_j \eta_i + \pi_{ji} \xi, \quad (8)$$

характеризующие соответствие $\xi \rightarrow x$ и определяющие ковариантное дифференцирование во внутренней связности этого соответствия, причем (так же как и в § 50) мы согласимся отмечать это дифференцирование скобкой вокруг индекса дифференцируемого тензора.

Пронормировав ξ так, чтобы имело место тождество

$$x\xi = 1, \quad (9)$$

*) Условие взаимной однозначности состоит в том, что

$$\text{Det} \| p_{ij} \| = \text{Det} \| x, y_1, \dots, y_n \| \cdot \text{Det} \| \xi, \partial_1 \xi, \dots, \partial_n \xi \| \neq 0.$$

и приняв во внимание, что

$$y_i \xi = 0, \quad (10)$$

мы получим, дифференцируя,

$$\nabla_j (y_i \xi) = \nabla_j y_i \xi + y_i \partial_j \xi = p_{ji} + y_i \eta_j = 0$$

и, аналогично,

$$\pi_{ji} + \eta_i y_j = 0,$$

откуда

$$p_{ij} = \pi_{ji}, \quad (11)$$

а согласно (4) и

$$R_{ij} = \rho_{ji}, \quad (12)$$

где ρ_{ij} — тензор Риччи пространства гиперплоскостей. Применение смешанного дифференцирования дает нам условие

$$\nabla_k p_{(j)i} = (\lambda_k + l_k) p_{ji}, \quad (13)$$

связывающее обе рассматриваемые геометрии *) и переходящее в условие сопряженности в случае гармонического соответствия, т. е. в случае симметрии p_{ji} . Пара геометрий будет кодацциевой вследствие условия (ЗВІІІ).

Связка Π_m в пространстве P_n может рассматриваться как проективное пространство m измерений, элементом которого является гиперплоскость P_{n-1} , принадлежащая этой связке, а элемент, двойственный основному, есть плоскость P_{n-m} .

Применяя принцип двойственности, можно, обратно, считать P_{n-m} основным, а P_{n-1} двойственным ему элементом пространства Π_m . Установив дифференцируемое соответствие между элементами P_{n-m} и двойственными им элементами P_{n-1} , мы придем к схеме, вполне аналогичной схеме нормализованного пространства. Будем говорить, что при наличии указанного соответствия связка Π_m нормализована, и обозначать ее $N(\Pi_m)$.

Характеристическое многообразие связки Π_m есть некоторая P_{n-m-1} (§ 18). Пусть нам дана поверхность X_m . Проведем через каждую точку этой поверхности и через характеристическое P_{n-m-1} связки Π_m плоскость

*) В случае несимметричного p_{ji} мы будем называть (13) *обобщенным условием сопряженности* связностей G и Γ .

P_{n-m} и примем ее за нормаль первого рода. Предположим, кроме того, что связка нормализована, и примем за нормаль второго рода X_m плоскость пересечения гиперплоскости P_{n-1} , соответствующей нормали первого рода, с T_m поверхности X_m . Будем говорить, что полученная таким образом нормализация поверхности X_m перспективна нормализации связки Π_m .

Покажем, что внутренняя геометрия $N(X_m)$ не зависит от выбора поверхности X_m , если нормализация перспективна нормализации некоторой связки.

Пусть X_s суть $n - m$ независимых точек, определяющих положение характеристического многообразия связки Π_m . Примем их за вершины нормали первого рода и будем считать постоянными.

Соответствующие точки двух поверхностей, расположенных на одной нормали первого рода, связаны соотношением

$$z = x + \lambda^a X_a, \quad (14)$$

вследствие чего

$$\partial_i z = \partial_i x + \partial_i \lambda^a X_a.$$

Сравнивая опорные точки нормалей второго рода $t_i = \partial_i z - m_i z$ и $y_i = \partial_i x - l_i x$, мы получим

$$t_i = y_i + \mu_i^a X_a + \mu_i x,$$

но опорные точки должны принадлежать гиперплоскости, проходящей через все X_a и не содержащей x , вследствие чего $\mu_i = 0$.

Нормальные точки некоторого вектора v^i на обеих поверхностях связаны соотношением

$$\bar{v} = v + \mu_i^a v^i X_a, \quad (15)$$

вследствие чего

$$d\bar{v} = dv + v^a X_a. \quad (16)$$

Сравнивая левые и правые части равенств (14), (15) и (16), мы видим, что если плоскость смещения точки v пересекает нормаль первого рода, то и плоскость смещения точки $\bar{v}$ пересекает нормаль первого рода, а отсюда следует, что направление вектора v^i переносится

параллельно одновременно во внутренних геометриях обеих поверхностей, и эти геометрии, не имея кручения, должны совпадать между собою.

Пользуясь доказанной теоремой, можно легко установить характер внутренней геометрии $N(X_m)$, нормализованной с помощью связки. Действительно, какова бы ни была эта поверхность, ее внутренняя геометрия совпадает с геометрией плоскости P_m , нормализованной с помощью той же связки, а эта геометрия будет проективно-евклидовой. Геодезические линии на X_m должны быть перспективны геодезическим линиям на P_m , а последние линии — прямые. Таким образом, *геодезические линии поверхности X_m , нормализованной с помощью связки, суть сечения этой поверхности плоскостями P_2 , принадлежащими этой связке.*

Отметим, наконец, что если гиперплоскость Ω , содержащая нормали второго рода, неподвижна, то внутренняя геометрия P_m , нормализованной с помощью связки, евклидова. Отсюда следует, что *и внутренняя геометрия любой поверхности, нормализованной с помощью связки так, что все нормали второго рода лежат в одной гиперплоскости, принадлежащей этой связке, будет евклидовой.*

§ 63. Гиперповерхность проективного пространства

Геометрия гиперповерхностей X_n пространств P_{n+1} содержит ряд существенных особенностей по отношению к теории поверхностей произвольного числа измерений.

Касательная плоскость гиперповерхности

$$x = x(u^1, u^2, \dots, u^n) \quad (1)$$

будет иметь n измерений, т. е. будет гиперплоскостью, и ее можно выразить тангенциальными координатами ξ_α или ковектором ξ , который будет зависеть от тех же параметров, что и x . Таким образом, наряду с точечным уравнением X_n (1), мы можем рассматривать ее тангенциальное уравнение

$$\xi = \xi(u^1, u^2, \dots, u^n). \quad (2)$$

Дифференцируя условие инцидентности

$$x\xi = 0 \quad (3)$$

и принимая во внимание, что

$$\partial_i x \cdot \xi = 0, \quad (4)$$

мы получим

$$\partial_i \xi \cdot x = 0. \quad (5)$$

Форма

$$b_{ij} du^i du^j = - dx d\xi \quad (6)$$

называется *основной квадратичной формой проективно-дифференциальной геометрии гиперповерхности*.

Дифференцируя соотношения $dx \cdot \xi = 0$, $x \cdot d\xi = 0$, можно представить ее также в виде

$$b_{ij} du^i du^j = d^2 x \cdot \xi = d^2 \xi \cdot x. \quad (7)$$

Вследствие этого ее коэффициенты можно представить в трех видах:

$$b_{ij} = \partial_{ij}^2 x \cdot \xi = \partial_{ij}^2 \xi \cdot x = - \partial_i x \cdot \partial_j \xi, \quad (8)$$

и они определяют ковариантный симметричный тензор. Очевидно, при изменении нормирования x или ξ величины b_{ij} множатся на те же множители, что и эти векторы.

Два направления, принадлежащие гиперповерхности, исходящие из ее точки и выражаемые векторами v^i и w^j , называются *сопряженными*, если они сопряжены относительно основной квадратичной формы, т. е. удовлетворяют условию

$$b_{ij} v^i w^j = 0. \quad (9)$$

Чтобы истолковать условие сопряженности, рассмотрим семейство касательных гиперплоскостей ξ , заданных в точках некоторой кривой, принадлежащей X_n . Две бесконечно близкие гиперплоскости ξ и $\xi + d_1 \xi$ этого семейства определяют плоскость P_{n-1} , предельное положение которой дает *характеристическое многообразие семейства*. Для того чтобы точка $x + d_2 x$ принадлежала этому многообразию, необходимо и достаточно, чтобы

$$(x + d_2 x) (\xi + d_1 \xi) = d_2 x d_1 \xi = 0,$$

или

$$d_2 x d_1 \xi = - b_{ij} d_1 u^i d_2 u^j = 0.$$

Итак, для того чтобы два направления были сопряжены, необходимо и достаточно, чтобы одно из них определяло

смещение точки по гиперповерхности, а второе принадлежало характеристическому многообразию семейства гиперплоскостей, соответствующему первому смещению.

Направление v^i называется *асимптотическим*, если оно является нулевым направлением основной формы, т. е. удовлетворяет условию

$$b_{ij}v^iv^j = 0. \quad (10)$$

Линия гиперповерхности, касающаяся в каждой своей точке асимптотического направления, называется *асимптотической*.

Так как для такой линии

$$x\xi = 0, \quad dx\xi = 0, \quad d^2x\xi = 0, \quad (11)$$

а точки x , dx и d^2x определяют ее соприкасающуюся плоскость, то *асимптотическая линия гиперповерхности характеризуется тем, что ее соприкасающаяся плоскость принадлежит касательной гиперплоскости этой гиперповерхности*.

Рассмотрим матрицу, составленную из координат точек x , $\partial_i x$ и X , где X — произвольная точка, и матрицу, составленную из координат гиперплоскостей ξ , $\partial_i \xi$, Ξ , где Ξ тоже произвольно. Перемножая определители этих матриц, получим

$$\begin{aligned} \Delta_1 \Delta_2 &= (x, \partial_1 x, \dots, \partial_n x, X) (\xi, \partial_1 \xi, \dots, \partial_n \xi, \Xi) = \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & (X\xi) \\ 0 & -b_{11} & \dots & -b_{1n} & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & -b_{n1} & \dots & -b_{nn} & . \\ (x\Xi) & \dots & \dots & \dots & (X\Xi) \end{vmatrix} = \pm (X\xi) (x\Xi) b, \end{aligned}$$

где b — дискриминант основной формы.

Так как ранг матрицы $\|x, \partial_1 x, \dots, \partial_n x\|$ равен $n + 1$, то, выбирая точку X так, чтобы она не лежала в касательной плоскости, мы будем иметь первый определитель и $(X\xi)$ не равными нулю. Если, кроме того, считать, что гиперплоскость Ξ не проходит через точку x , то мы увидим, что определитель

$$(\xi, \partial_1 \xi, \dots, \partial_n \xi, \Xi)$$

обращается в нуль одновременно с b . Однако в силу произвольности Ξ определитель Δ_2 может обращаться в нуль, только если ранг матрицы

$$\|\xi, \partial_1 \xi, \dots, \partial_n \xi\|,$$

ниже $n + 1$, а, согласно § 56, в таком случае координаты $u^1, u^2, \dots, u^n$ не могут быть независимы, иначе говоря, множество касательных гиперплоскостей ξ зависит от числа параметров, меньшего n (как это имеет место, например, для развертывающейся поверхности трехмерного пространства).

В дальнейшем будем постоянно предполагать, что неравенство

$$b = \text{Det } b_{ij} \neq 0 \quad (12)$$

выполнено во всех точках поверхности, за исключением, может быть, некоторых *особых точек*, которые мы исключим из рассмотрения. Иначе говоря, мы будем предполагать, что тензор b_{ij} неособенный. Это условие позволяет рассматривать гиперповерхность как n -мерное место точек и как огибающую семейства гиперплоскостей, зависящих от n параметров, т. е. как такой образ, который двойствен сам себе.

Учитывая это обстоятельство и делая выводы из общих результатов, полученных нами для поверхностей любого числа измерений, мы будем иметь возможность при рассмотрении нормализованной гиперповерхности обратиться все эти результаты по принципу двойственности.

Для удобства сравнения в дальнейшем эти результаты выписываются двумя столбцами друг против друга, как это принято в проективной геометрии.

§ 64. Нормализованная гиперповерхность

Гиперповерхность нормализована, если с каждой ее точкой связана прямая P_1 — нормаль первого рода, проходящая через ее точку x , но не лежащая в ее касательной гиперплоскости, а в каждой ее касательной гиперплоскости ξ расположена гиперпрямая *), не проходящая через точку прикосновения.

*) Для краткости и симметрии мы будем называть гиперпрямой многообразие P_{n-1} в пространстве P_{n+1} .

Нормаль первого рода определяется расположенной на ней точкой X , которая не совпадает с точкой x и называется *вершиной нормали первого рода*.

Нормаль второго рода определяется n расположенными на ней точками

$$y_i = \partial_i x - l_i x, \quad (1)$$

которые называются *опорными точками нормали второго рода*.

Величины l_i определяют *нормализатор первого рода*. Нормализатор есть ковектор пространства криволинейных координат и преобразуется при перенормировании точки

$$\check{x} = s x \quad (2)$$

по следующему закону:

$$\check{l}_i = l_i + \partial_i \ln s. \quad (3)$$

Величина y_i есть тензор с векторными компонентами и при перенормировании преобразуется так:

$$\check{y}_i = s y_i. \quad (4)$$

Всякому направлению a^i аналитического пространства (u^i) можно поставить в соответствие точку $a = a^i y_i$, расположенную на нормали второго рода, — *нормальную точку данного направления*.

Нормаль второго рода определяется проходящей через нее гиперплоскостью Ξ , которая не совпадает с гиперплоскостью ξ и называется *основанием нормали второго рода*.

Нормаль первого рода определяется n проходящими через нее гиперплоскостями

$$\eta_i = \partial_i \xi - \lambda_i \xi, \quad (1')$$

которые называются *опорными гиперплоскостями нормали первого рода*.

Величины λ_i определяют *нормализатор второго рода*. Нормализатор есть ковектор пространства криволинейных координат и преобразуются при перенормировании гиперплоскости

$$\check{\xi} = \sigma \xi \quad (2')$$

по следующему закону:

$$\check{\lambda}_i = \lambda_i + \partial_i \ln \sigma. \quad (3')$$

Величина η_i есть тензор с векторными компонентами и при перенормировании преобразуется так:

$$\check{\eta}_i = \sigma \eta_i. \quad (4')$$

Всякому направлению α^i аналитического пространства (u^i) можно поставить в соответствие гиперплоскость $\alpha = \alpha^i \eta_i$, проходящую через нормаль первого рода, — *нормальную гиперплоскость данного направления*.

Если нормальная точка a и нормальная гиперплоскость α инцидентны, то

$$\alpha a = \alpha^i a^j y_i \eta_j = -b_{ij} \alpha^i a^j = 0.$$

Таким образом, нормальная точка и нормальная гиперплоскость, инцидентные между собою, соответствуют сопряженным направлениям многообразия (u^i) .

Внутренней связностью первого рода нормализованной гиперповерхности называется такая аффинная связность без кручения, которая характеризуется тем, что при параллельном перенесении направления нормальная точка, отвечающая этому направлению, смещается в инцидентной ей плоскости P_2 , содержащей нормаль первого рода.

Внутренней связностью второго рода нормализованной гиперповерхности называется такая аффинная связность без кручения, которая характеризуется тем, что при параллельном перенесении направления нормальная гиперплоскость, отвечающая этому направлению, вращается вокруг инцидентного ей многообразия P_{n-2} , принадлежащего нормали второго рода.

Рассмотрим два направления a^i и α^j , сопряженные между собою, и предположим, что первое из них переносится параллельно во внутренней геометрии первого рода, а второе — во внутренней геометрии второго рода $N(X_n)$.

Так как в силу условия сопряженности нормальная точка a и нормальная гиперплоскость α инцидентны, то $\alpha a = 0$, а вследствие условия параллельного перенесения первого рода смещение точки a должно принадлежать нормальной плоскости, инцидентной этой точке, а значит (и подавно) — нормальной гиперплоскости α . Таким образом, $\alpha da = 0$. Аналогично показывается, что, в силу параллельного перенесения второго рода направления α^i , $d\alpha a = 0$. Поэтому

$$d(\alpha a) = 0,$$

и, значит, условие сопряженности $\alpha a = 0$ остается

выполненным после указанных параллельных перенесений направлений. Таким образом, направления сохраняют сопряженность, если каждое из них переносится параллельно в одной из двух внутренних связностей нормализованной поверхности.

Иными словами, *внутренние связности первого и второго родов нормализованной гиперповерхности сопряжены относительно тензора основной квадратичной формы этой гиперповерхности.*

§ 65. Основные уравнения нормализованной гиперповерхности

С каждой точкой $N (X_n)$ можно связать два проективных репера, задавая первый вершинами, а второй — гранями

$$x, y_i, X, \quad (1) \quad \xi, \eta, \Xi, \quad (1')$$

определенными в предыдущем параграфе. Здесь и в дальнейшем в обозначениях X_1 и Ξ_1 индекс 1 опускается.

Взаимные следы векторов и ковекторов, определяющих эти реперы, могут быть записаны в виде следующей таблицы:

	ξ	Ξ	η_j
x	0	1	0
X	1	Ω	0
y_i	0	0	$-b_{ij}$

(2)

причем условия $x\Xi = \xi X = 1$ определяют нормирование векторов X и Ξ в зависимости от нормирования векторов ξ и x . Отсюда следует, что веса X и ξ , x и Σ отличаются знаком.

Разлагая производные векторов, определяющих реперы, по этим же векторам, мы получим системы основных

приведенных дифференциальных уравнений $N(X_n)$:

$$\left. \begin{array}{ll} y_i = \partial_i x - l_i x, & (A) \quad \eta_i = \partial_i \xi - \lambda_i \xi, & (A') \\ \nabla_j y_i = l_j y_i + p_{ji} x + b_{ji} X, & (B) \quad \nabla_j \eta_{(i)} = \lambda_j \eta_i + & (B') \\ & + \pi_{ji} \xi + b_{ji} \Xi, & \\ \nabla_j X = g_j^k y_k + g_j x - \lambda_j X, & (C) \quad \partial_j \Xi = \gamma_j^k \eta_k + & (C') \\ & + \gamma_j \xi - l_j \Xi. & \end{array} \right\} (3)$$

В формулах (3С) обозначения коэффициентов по сравнению с формулами (60,6С) несколько изменены.

Эти уравнения являются частным видом уравнений (60,1) и их аналогами, полученными по принципу двойственности, причем справа скобки вокруг индекса показывают, что ковариантное дифференцирование соответствует внутренней связности второго рода.

Остается объяснить совпадение некоторых коэффициентов в правой и левой частях. Для этого будем выводить дифференциальные следствия из данных таблицы (2). Во-первых,

$$\partial_i (\xi X) = (\eta_i + \lambda_i \xi) X + \xi (g_i^k y_k + g_i x + n_i X) = 0,$$

откуда

$$n_i = -\lambda_i.$$

Во-вторых

$$\nabla_j (\xi y_i) = (\eta_j + \lambda_j \xi) y_i + \xi (l_j y_i + p_{ji} x + b_{ji} X) = 0,$$

откуда

$$b_{ij} = -y_i \eta_j \quad (4)$$

и, следовательно, совпадает с тензором основной квадратичной формы. Остальные совпадения объясняются аналогично.

Имеем

$$\nabla_j (\Xi y_i) = (\gamma_j^k \eta_k + \gamma_j \xi - \lambda_j \Xi) y_i + \Xi (l_j y_i + p_{ji} x + b_{ji} X) = 0,$$

откуда непосредственно и по аналогии следует, что

$$\gamma_j^k b_{ki} = p_{ji} + \Omega b_{ji}, \quad (5) \quad g_j^k b_{ki} = \pi_{ji} + \Omega b_{ji}. \quad (5')$$

Этими двумя формулами мы воспользуемся позднее.

Дифференцируя (4) смешанным образом по отношению к связностям первого и второго родов, получаем

$$\nabla_k b_{i(j)} = -y_i (\lambda_k \eta_j + \pi_{kj} \xi + b_{kj} \Xi) - (l_k y_i + p_{ki} x + b_{ki} X) \eta_j,$$

откуда

$$\nabla_k b_{i(j)} = (l_k + \lambda_k) b_{ij} = 2\omega_k b_{ij}.$$

Таким образом, получено новое доказательство сопряженности внутренних связностей. Кроме того, мы видим, что *дополнительный вектор ω_k средней метрики Вейля связностей первого и второго родов $N(X_n)$ равен полусумме нормализаторов первого и второго родов:*

$$\omega_k = \frac{l_k + \lambda_k}{2}. \quad (6)$$

Принимая во внимание последнюю формулу, мы получим условия интегрируемости основных уравнений для гиперповерхности:

$$\left. \begin{array}{l} b_{[ij]} = 0, \quad (I) \\ p_{[ji]} + \nabla_{[j} l_{i]} = 0, \quad (II) \end{array} \right\} \quad (A)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi_{[ji]} + \nabla_{[j} \lambda_{i]} = 0, \quad (II') \\ R_{kji}^m = 2p_{[kj]} \delta_i^m - 2\delta_{[k}^m p_{j]i} - 2b_{i[j} g_{k]}^m, \quad (I) \\ \nabla_{[k} b_{j]i} = 2\omega_{[k} b_{j]i}, \quad (II) \\ \nabla_{[k} p_{j]i} = -g_{[k} b_{j]i}, \quad (III) \end{array} \right\} \quad (B)$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho_{kji}^m = 2\pi_{[kj]} \delta_i^m - 2\delta_{[k}^m \pi_{j]i} - 2b_{i[j} \gamma_{k]}^m, \quad (I') \\ \nabla_{[k} b_{j](i)} = 2\omega_{[k} b_{j]i}, \quad (II') \\ \nabla_{[k} \pi_{j](i)} = -\gamma_{[k} b_{j]i}, \quad (III') \end{array} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{[j} g_{i]}^k + 2\omega_{[j} g_{i]}^k + g_{[i} \delta_{j]}^k = 0, \quad (I) \\ \nabla_{[j} g_{i]}^k + g_{[i} p_{j]k} + 2\omega_{[j} g_{i]}^k = 0, \quad (II) \\ 2\nabla_{[j} \omega_{i]} + p_{[ji]} + \pi_{[ji]} = 0^*), \quad (III) \end{array} \right\} \quad (C)$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{[j} \gamma_{i]}^k + 2\omega_{[j} \gamma_{i]}^k + \gamma_{[i} \delta_{j]}^k = 0, \quad (I') \\ \nabla_{[j} \gamma_{i]}^k + \gamma_{[i} \pi_{j]k} + 2\omega_{[j} \gamma_{i]}^k = 0, \quad (II') \\ \nabla_{[j} \omega_{i]} + p_{[ji]} + \pi_{[ji]} = 0^*), \quad (III) \end{array} \right\}$$

Согласно основной теореме § 60 *нормализованная поверхность определяется своей внутренней связностью и величинами b_{ij} , p_{ij} , ω_i , g_i^j и g_i , если они удовлетворяют условиям интегрируемости. Условия этой теоремы могут*

*) Последняя формула принимает указанный симметричный вид вследствие (6).

быть упрощены. Свернем левые и правые части равенств (7В) с b^{ij} , т. е. с тензором, обратным тензору b_{ij} , и получим

$$g_k^l = \frac{1}{n-1} b^{ij} (2p_{[kj]} \delta_i^l - 2\delta_{[k}^i p_{j]i} - R_{kji}^l), \quad (8)$$

$$\omega_k = \frac{1}{n-1} b^{ij} \nabla_{[k} b_{j]i}, \quad (9)$$

$$g_k = \frac{1}{n-1} b^{ij} \nabla_{[k} p_{j]i}. \quad (10)$$

Таким образом, из пяти величин, приведенных в условии теоремы, три последние определяются через две первые, если тензор b_{ij} не вырождается, и мы приходим к следующей формулировке.

Нормализованная поверхность с невырожденным тензором b_{ij} определяется своей внутренней связностью первого (второго) рода и тензорами b_{ij} и p_{ij} (π_{ij}), если величины, определенные равенствами (8), (9) и (10), удовлетворяют условиям (7В) и (7С).

В общем случае мы можем пойти еще дальше.

Для этого, свертывая (7ВІ) по k и m , получим следующее выражение тензора Риччи геометрии первого рода:

$$R_{ji} = p_{ij} - np_{ji} + b_{ik} g_j^k - b_{ij} g_k^k, \quad (11)$$

или, согласно (5),

$$R_{ji} = p_{ij} - np_{ji} + \pi_{ji} + ab_{ij}, \quad (12)$$

где

$$a = \Omega - g_k^k = (1 - n) \Omega - b^{ij} \pi_{ij}. \quad (13)$$

Альтернируя, симметрируя и выписывая двойственные соотношения, мы получим следующую систему равенств:

$$R_{[ji]} = (1 + n) p_{[ij]} - \pi_{[ij]}, \quad (14) \quad \rho_{[ji]} = (1 +$$

$$+ n) \pi_{[ij]} - p_{[ij]}, \quad (14')$$

$$R_{(ji)} = (1 - n) p_{(ij)} +$$

$$+ \pi_{(ij)} + ab_{ij}, \quad (15) \quad \rho_{(ji)} = (1 - n) \pi_{(ij)} +$$

$$+ p_{(ij)} + \alpha b_{ij}. \quad (15')$$

Первые два из них всегда разрешимы и дают

$$P_{[ij]} = \frac{(n+1) R_{[ji]} + \rho_{[ji]}}{n(n+2)}, \quad \pi_{[ij]} = \frac{(n+1) \rho_{[ji]} + R_{[ji]}}{n(n+2)}. \quad (16)$$

Другие два равенства разрешимы при $n > 2$ и дают

$$\left. \begin{aligned} P_{(ij)} &= \frac{(1-n) R_{(ij)} - \rho_{(ij)}}{n(n-2)} + b b_{ij}, \\ \pi_{(ij)} &= \frac{(1-n) \rho_{(ij)} - R_{(ij)}}{n(n-2)} + \beta b_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Заметим, что множители b и β несущественны; им можно придать любые значения за счет перемещения вершины нормали первого рода и основания нормали второго рода; это следует из формулы (61,7), которая показывает, что при этом тензоры p_{ij} и π_{ij} заменяются по формулам

$$p_{ij} = \bar{p}_{ij} + s b_{ij}, \quad (18) \quad \pi_{ij} = \bar{\pi}_{ij} + \sigma b_{ij}. \quad (18')$$

Следовательно, при $n > 2$ тензоры p_{ij} и π_{ij} определяются через внутренние связности $N(X_n)$. Но каждая из двух внутренних связностей сопряжена другой по отношению к тензору b_{ij} и, значит, определится, как только будет задан этот тензор.

Таким образом, мы приходим к следующей теореме: при $n > 2$ нормализованная гиперповерхность с невырожденным тензором b_{ij} определится заданием этого тензора и любой из двух своих внутренних связностей, если величины, определенные уравнениями (16), (17), (8), (9), (10), удовлетворяют условиям (7В) и (7С).

Введем еще одно соотношение, которым воспользуемся в дальнейшем. Свертывая (15) с b^{ij} , мы получим

$$b^{ij} R_{ij} = (1-n) (b^{ij} p_{ij} + b^{ij} \pi_{ij} + n\Omega)$$

и, вследствие симметрии правой части по отношению к обоим внутренним связностям,

$$b^{ij} R_{ij} = b^{ij} \rho_{ij}, \quad (19)$$

что легко выводится и из (51,10). Таким образом, это равенство является следствием сопряженности внутренних связностей.

Мы видели, что внутренние связности нормализованной гиперповерхности образуют сопряженную пару. Укажем теперь условие, которому должна удовлетворять такая пара, чтобы ее можно было реализовать на некоторой гиперповерхности.

В § 52 введено понятие составного преобразования пары, состоящего из двух проективных преобразований каждой из геометрий пары, сохраняющих их сопряженность. С другой стороны, в § 61 показано, что замена нормали второго рода сопровождается проективным преобразованием внутренней геометрии, которая для гиперповерхности будет геометрией первого рода. Обращая этот результат по принципу двойственности, мы видим, что замена нормали первого рода при сохранении нормали второго рода на гиперповерхности сопровождается проективным преобразованием геометрии второго рода. Кроме того, тензор основной квадратичной формы гиперповерхности не зависит от нормализации, а внутренние геометрии остаются сопряженными относительно этого тензора после перемены нормализации. Принимая во внимание все сказанное, мы приходим к следующему заключению: *всякая замена нормализации гиперповерхности сопровождается составным преобразованием пары внутренних связностей, причем символ этого преобразования есть (p_i, π_i) , где p_i и π_i — векторы, определяющие положение нормалей второго и первого родов соответственно по отношению к старой нормализации.*

Всякую гиперповерхность можно нормализовать с помощью связки, т. е. задать нормали первого рода так, чтобы они проходили через одну точку, а все нормали второго рода взять в одной гиперплоскости, содержащей эту точку. Но в этом случае, согласно § 62, внутренняя геометрия первого рода будет евклидовой. Обратив этот результат по принципу двойственности, мы приходим к следующему: *внутренние геометрии гиперповерхности, нормализованной с помощью связки, образуют евклидову пару.*

Как бы ни была нормализована гиперповерхность первоначально, мы всегда можем перейти к ее нормализации с помощью связки, откуда следует, что пара внутренних геометрий этой гиперповерхности может быть переведена с помощью составного преобразования в **евклидову** пару.

Пусть теперь нам дана некоторая пара евклидовых связностей, сопряженных относительно тензора b_{ij} , который, согласно пункту 7 § 53, мы всегда можем считать пронормированным так, что он удовлетворяет уравнению Кодацци. Покажем, что эта пара может быть реализована на некоторой $N(X_n)$.

Действительно, если дана пара евклидовых связностей, сопряженных относительно тензора b_{ij} , то выполняются условия

$$R_{ijk}{}^l = 0, \quad (20) \quad \rho_{ijk}{}^l = 0, \quad (20')$$

$$\nabla_{[k} b_{j]i} = 0, \quad (21) \quad \nabla_{[k} b_{(j)](i)} = 0. \quad (21')$$

Пользуясь условиями (16) и (17) и произволом в выборе величин b и β , мы получим

$$p_{ij} = \pi_{ij} = 0, \quad (22)$$

откуда, согласно (8), (9), (10),

$$g_k^l = \gamma_k^l = 0, \quad \omega_k = 0, \quad g_k = \gamma_k = 0, \quad l_i = \lambda_i = 0, \quad (23)$$

и все условия (7) сводятся к (20), (20') и (21), (21').

Если теперь предположить, что нам дана пара сопряженных связностей, приводимая с помощью некоторого составного преобразования к евклидовой, то, найдя гиперповерхность, нормализованную так, чтобы на ней определилась последняя, мы вернемся с помощью обратного составного преобразования к исходной паре, произведя замену нормалей, соответствующую этому обратному преобразованию, и данная пара связностей окажется реализованной на гиперповерхности.

Итак, для того чтобы связности сопряженной пары могли быть внутренними связностями гиперповерхности, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое составное преобразование, которое переводит эту пару в евклидову.

В заключение отметим еще одну особенность евклидовой пары для случая $n > 2$. Мы видели, что эти пары осуществляются при условиях (23). Кроме того, из (5) следует, что $\Omega = 0$. Но уравнения (3С) дают в таком случае $X = \text{const}$, $\Xi = \text{const}$, причем $X\Xi = 0$, и, следовательно, гиперповерхность нормализована с помощью связки.

Итак, всякая евклидова пара является парой внутренних связностей гиперповерхности, причем при $n > 2$ эта гиперповерхность нормализована связкой.

§ 66. Гармонизм и сопряженность

В пространстве, число измерений которого $n > 2$, не всякое однопараметрическое семейство прямых имеет огибающую, т. е. такую кривую, которая касается всех прямых семейства. Если огибающая существует, или все прямые семейства проходят через одну точку, то поверхность, образованная этими прямыми, называется *развертывающейся*.

Мы будем называть *главной линией первого рода* на нормализованной гиперповерхности такую линию, вдоль которой нормали первого рода образуют развертывающуюся поверхность.

Чтобы найти главную линию, предположим, что

$$z = x + \lambda X$$

есть точка прикосновения нормали первого рода к соответствующей огибающей. В таком случае точка

$$dz = dx + \lambda dX + d\lambda X$$

лежит на той же нормали, условием чего будет равенство

$$\eta_i dz = \eta_i dx + \lambda \eta_i dX = 0,$$

где η_i — опорная гиперплоскость нормали первого рода. Но

$$\eta_i dx = \eta_i (y_j + l_j x) du^j = -b_{ij} du^j,$$

$$\begin{aligned} \eta_i dX &= \eta_i (g_j^k y_k + g_j x - \lambda_j X) du^j = \\ &= -g_j^k b_{ki} du^j = -(\pi_{ji} + \Omega b_{ji}) du^j. \end{aligned}$$

Таким образом, направление du^j смещения по главной линии должно удовлетворять следующим условиям:

$$(\pi_{ji} - s b_{ji}) du^j = 0, \quad (1)$$

где s — скаляр, подлежащий определению из условия совместности этой однородной системы.

Это условие имеет вид уравнения n -й степени

$$\text{Det } \|\pi_{ji} - s b_{ji}\| = 0, \quad (2)$$

и мы получим, по крайней мере, столько же независимых по направлению главных линий, сколько различных корней имеет это уравнение.

В § 61 мы называли X_m^{m-1} , составленное из нормалей второго рода, гармоничным поверхностью, если тензор p_{ij} , соответствующий этой нормализации, симметричен.

Аналогично, многообразие X_n^1 , составленное из нормалей первого рода, называется сопряженной гиперповерхности, если тензор π_{ij} симметричен.

Предположив эту симметрию, рассмотрим два главных направления $d_1 u^i$ и $d_2 u^i$, соответствующих двум различным корням s_1 и s_2 уравнения (2). Свертывая обе части соотношений

$$\pi_{ji} d_1 u^j = s_1 b_{ji} d_1 u^j, \quad \pi_{ji} d_2 u^j = s_2 b_{ji} d_2 u^j \quad (3)$$

с $d_2 u^i$ и $d_1 u^i$ соответственно и вычитая их друг из друга, получим

$$(s_1 - s_2) b_{ij} d_1 u^i d_2 u^j = 0.$$

Таким образом, если X_n^1 нормалей первого рода сопряжено гиперповерхности, то главные направления, соответствующие различным корням уравнения (2), сопряжены между собою.

Если на гиперповерхности существует n независимых и сопряженных между собою главных направлений, то, принимая их за координатные и учитывая справедливое для каждой пары этих направлений соотношение

$$\pi_{ji} d_k u^j d_l u^i = 0 \quad \text{при } k \neq l,$$

мы убеждаемся в симметрии π_{ji} и, следовательно, в сопряженности X_n^1 нормалей первого рода гиперповерхности.

С помощью принципа двойственности можно и для нормалей второго рода ввести соответствующие понятия и получить аналогичные результаты, характеризующие гармоничность многообразия X_n^{n-1} гиперповерхности.

Сравним шесть условий:

1) многообразие нормалей первого рода сопряжено X_n^1 :

$$n(n+2) p_{[ij]} = (n+1) R_{[ij]} + \rho_{[ij]} = 0;$$

2) многообразие нормалей второго рода гармонично X_n^1 :

$$n(n+2) \pi_{[ij]} = (n+1) \rho_{[ij]} + R_{[ij]} = 0;$$

3) внутренняя связность первого рода $N(X_n)$ эквивалентная:

$$\partial_{[j} G_{i]k}^h = R_{[ji]} = 0;$$

4) внутренняя связность второго рода $N(X_n)$ эквивалентная:

$$\partial_{[j} \Gamma_{i]k}^h = \rho_{[ji]} = 0;$$

5) средняя связность двух внутренних связностей эквивалентная:

$$\partial_{[j} \mathcal{G}_{i]k}^h = \frac{1}{2} (R_{[ji]} + \rho_{[ji]}) = 0;$$

6) чебышевский вектор тензора b_{ij} градиентен:

$$(n+2) \partial_{[j} t_{i]} = \partial_{[j} \Gamma_{i]k}^h - \partial_{[j} G_{i]k}^h = \rho_{[ji]} - R_{[ji]} = 0.$$

Мы приходим к следующему результату: *если из приведенных шести условий выполнены два, то выполнены и все шесть.*

В случае выполнения первых двух условий будем говорить, что нормализация *вполне гармонична* поверхности. Согласно § 61 в этом случае можно ввести каноническое нормирование как для точек, так и для касательных гиперплоскостей $N(X_n)$.

Основные уравнения и условия интегрируемости принимают тогда следующий вид:

$$\left. \begin{array}{ll} \partial_i x = y_i, & (A) \\ \nabla_j y_i = p_{ji} x + b_{ij} X, & (B) \\ \nabla_j X = g_j^k y_k + g_j x, & (C) \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \partial_i \xi = \eta_i, & (A') \\ \nabla_j \eta_{(i)} = \pi_{ji} \xi + b_{ij} \Xi, & (B') \\ \nabla_j \Xi = \gamma_j^k \eta_k + \gamma_j \xi; & (C') \end{array} \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{ll} b_{[ij]} = 0, & (I) \\ p_{[ij]} = 0, & (II) \\ R_{kji}^m = -2\delta_{[k}^m p_{j]i} - 2b_{i[j} g_{k]}^m, & (I) \\ \nabla_{[k} b_{j]i} = 0, & (II) \\ \nabla_{[k} p_{j]i} = -g_{[k} b_{j]i}, & (III) \\ \nabla_{[j} g_{i]}^k + g_{[i} \delta_{j]}^k = 0, & (I) \\ \nabla_{[j} g_{i]}^k + g_{[i} p_{j]}^k = 0, & (II) \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \pi_{[ij]} = 0; & (II') \\ \rho_{kji}^m = -2\delta_{[k}^m \pi_{j]i} - 2b_{i[j} \gamma_{k]}^m, & (I') \\ \nabla_{[k} b_{j](i)} = 0, & (II') \\ \nabla_{[k} \pi_{j](i)} = -\gamma_{[k} b_{j]i}, & (III') \\ \nabla_{[j} \gamma_{i]}^k + \gamma_{[i} \delta_{j]}^k = 0, & (I') \\ \nabla_{[j} \gamma_{i]}^k + \gamma_{[i} \pi_{j]}^k = 0. & (II') \end{array} \quad (A) \quad (B) \quad (C) \quad (5)$$

Вполне гармоническая нормализация характеризуется тем, что соответствующая ей пара внутренних геометрий эквиаффинна, а эквиаффинность сохраняется только при таком составном преобразовании (p_i, π_i) , которое определено двумя градиентными векторами (§ 53, пункт 3).

Но векторы p_i и π_i характеризуют положение новых нормалей относительно старых. Таким образом, *виртуальные нормали* *), образующие многообразия, которые сопряжены или гармоничны $N(X_n)$, определяются по отношению к вполне гармоничной нормализации градиентными ко векторами.

§ 67. Взаимные нормали

В § 57 мы отметили, что всякому ковариантному вектору a_i можно отнести некоторую виртуальную нормаль второго рода, а в случае гиперповерхности — и некоторую виртуальную нормаль первого рода.

Рассмотрим первую из них. Она определяется точками

$$z_i = y_i + a_i x.$$

Если нормаль второго рода преобразуется, причем вектор этого преобразования p_i определяется соотношением (61,1), согласно которому

$$\bar{y}_i = y_i + p_i x,$$

то те же точки определяются по отношению к новой нормализации формулами

$$z_i = \bar{y}_i + (a_i - p_i) x.$$

Обращая этот результат по принципу двойственности и принимая во внимание, что преобразование нормали первого рода, очевидно, не влияет на вектор a_i , а преобразование нормали второго рода — на вектор α_i , мы можем сформулировать следующие положения.

При преобразовании нормализации, сопровождающейся составным преобразованием (p_i, π_i) ,

*) Будем называть *виртуальными нормальными* такие плоскости, которые не являются нормальными, но могут служить таковыми.

вектор a_i , определяющий
согласно формуле

$$z_i = y_i + a_i x \quad (1)$$

вектор α_i , определяющий со-
гласно формуле

$$\xi_i = \eta_i + \alpha_i \xi \quad (1')$$

виртуальную нормаль вто-
рого рода, испытывает
преобразование

$$\bar{a}_i = a_i - p_i. \quad (2)$$

виртуальную нормаль пер-
вого рода, испытывает пре-
образование

$$\bar{\alpha}_i = \alpha_i - \pi_i. \quad (2')$$

Сопоставим эти формулы с формулой (52,7), дающей закон преобразования чебышевского вектора основного тензора пары сопряженных перенесений:

$$\bar{t}_i = t_i + (\pi_i - p_i). \quad (3)$$

Очевидно, если два вектора a_i , α_i связаны соотношением

$$\alpha_i - a_i = -t_i \quad (4)$$

и один из них преобразуется по формуле (2), то другой тоже преобразуется по соответствующей формуле (2'), а это значит, что если вектор a_i соответствует виртуальной нормали второго рода, не меняющейся при изменении нормализации, то α_i выражает виртуальную нормаль первого рода, тоже остающуюся неизменной при изменении нормализации. Иными словами, соотношение (4) определяет такое соответствие между виртуальными нормалью первого и второго родов, которое не зависит от нормализации, т. е. характеризует саму гиперповерхность в окрестности данной точки.

Это соответствие мы будем называть *соприкасающимся поляритетом гиперповерхности* в данной ее точке, а про виртуальные нормали P_{n-1} и P_1 , векторы которых связаны зависимостью (4), будем говорить, что они *взаимно полярны в этом соприкасающемся поляритете* или просто *взаимны друг другу*.

Соответствие, определенное соприкасающимся поляритетом, будет проективным; это следует из формулы (4), если принять во внимание, что a_i и α_i можно считать за центроаффинные координаты пространств, основными элементами которых являются P_{n-1} и P_1 соответственно. Более того, можно построить такую гиперповерхность второго порядка C_n , которая касается гиперповерхности

X_n в данной ее точке так, что взаимные поляры P_{n-1} и P_1 будут взаимно полярны относительно C_n . Гиперповерхность C_n называется *соприкасающейся поверхностью Чеха*, а в случае $n = 2$ — *поверхностью Ли*.

Так как нормали первого и второго родов определяются векторами $\alpha_i = 0$ и $a_i = 0$, то условием их взаимной полярности является равенство

$$t_i = 0. \quad (5)$$

В этом случае мы будем говорить, что нормализация *взаимна*. Таким образом, *взаимная нормализация* характеризуется тем, что определяемая ею пара внутренних геометрий будет *чебышевской*.

Соотношение (4) показывает, что в случае взаимной нормализации взаимные P_{n-1} и P_1 определяются одинаковыми векторами.

Вспомним теорему § 66 (стр. 230), в которой приводятся шесть условий, характеризующих нормализацию, вполне гармоничную гиперповерхности. Последнее из этих условий, требующее градиентности чебышевского вектора, очевидно, выполнено для взаимной нормализации, и мы можем сформулировать такое следствие указанной теоремы:

Если для взаимной нормализации выполнено одно из пяти следующих условий:

- 1) *нормали первого рода сопряжены гиперповерхности,*
- 2) *нормали второго рода гармоничны гиперповерхности,*
- 3) *геометрия первого рода эквиаффинная,*
- 4) *геометрия второго рода эквиаффинная,*
- 5) *средняя метрика риманова,*

то выполнены и все пять.

§ 68. Средние нормали

В § 57 мы отметили, что многообразие всех виртуальных нормалей P_{m-1} , расположенных в касательной плоскости X_m , можно отобразить на центроаффинное пространство t измерений, центром которого является точка поверхности. При этом координаты ковектора a_i , определяющего положение P_{m-1} , равны центроаффинным координатам соответствующего элемента этого центроаффинного пространства,

Если даны два P_{m-1} , определяемые векторами a_1 и a_2 , то третье P_{m-1} , определенное вектором $a_i = \frac{a_1 + a_2}{2}$, принадлежит пучку, определяемому первыми двумя, и разделяет их гармонически вместе с четвертым P_{m-1} , принадлежащим тому же пучку и проходящим через центр пространства, т. е. через точку поверхности (§ 24). Мы будем называть многообразие a_i *средним* по отношению к многообразиям a_1 и a_2 .

Применим эти рассуждения к гиперповерхностям, обратив их также по принципу двойственности.

Если в касательной гиперплоскости гиперповерхности X_n лежат два P_{n-1} , определяемые коекторами a_1 и a_2 , то третье P_{n-1} , определяемое коектором

$$a_i = \frac{a_1 + a_2}{2},$$

называется *средним* по отношению к первым двум и характеризуется тем, что разделяет их гармонически вместе с четвертым P_{n-1} , проходящим через точку X_n .

Рассмотрим теперь P_{n-1} , расположенное в касательной гиперплоскости гиперповерхности X_n , и P_1 , проходящее через ее точку, и

будем называть их *средним многообразием первого рода* такое P_1 , которое является средним по отношению к данному P_1 и P_{n-1} , взаимному данному P_{n-1} .

Если через точку гиперповерхности X_n проходят два P_1 , определяемые коекторами α_1 и α_2 , то третье P_1 , определяемое коектором

$$\alpha_i = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2},$$

называется *средним* по отношению к первым двум и характеризуется тем, что разделяет их гармонически вместе с четвертым P_1 , лежащим в касательной гиперплоскости X_n .

будем называть их *средним многообразием второго рода* такое P_{n-1} , которое является средним по отношению к данному P_{n-1} и P_1 , взаимному данному P_1 .

Среднее P_1 первого рода проходит через точку X_n , но не лежит в ее касательной гиперплоскости, т. е. является виртуальной нормалью первого рода.

Среднее P_{n-1} второго рода лежит в касательной гиперплоскости, но не проходит через точку X_n , т. е. является виртуальной нормалью второго рода.

Из определения следует, что *средние многообразия данных P_1 и P_{n-1} взаимны между собою.*

Если P_{n-1} определено ковектором a_i , а P_1 — ковектором α_i , то вследствие (67,4)

среднее P_1 первого рода определяется ковектором среднее P_{n-1} второго рода определяется ковектором

$$\alpha_i = \frac{a_i + \alpha_i}{2} - t_i, \quad (1) \qquad a_i = \frac{a_i + \alpha_i}{2} + t_i, \quad (1')$$

где t_i — чебышевский вектор тензора основной формы гиперповерхности.

В частности, ковекторы, определяющие средние нормали, т. е. средние многообразия первого и второго родов нормализующих многообразий X_n , будут

$$\alpha_i = -\frac{1}{2} t_i, \quad (2) \qquad a_i = \frac{1}{2} t_i. \quad (2')$$

При изменении нормализации, сопровождаемой составным преобразованием (p_i, π_i) , тензор $-\frac{t_i}{2}$, определяющий среднюю нормаль первого рода, преобразуется, согласно (52,7), так, что

$$-\frac{t'_i}{2} = -\frac{t_i}{2} - \frac{\pi_i - p_i}{2}. \quad (3)$$

Будем искать такое преобразование, при котором средняя нормаль остается инвариантной. В этом случае тензор $-\frac{t_i}{2}$ должен преобразовываться по формуле (67,2') так, что

$$-\frac{t'_i}{2} = -\frac{t_i}{2} - \pi_i. \quad (3*)$$

Сравнивая оба преобразования, получаем

$$\pi_i = -p_i. \quad (4)$$

Итак, для того чтобы при изменении нормализации сохранились средние нормали, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее составное преобразование было кососимметричным.

Однако кососимметричное преобразование характеризуется тем, что оно сохраняет среднюю метрику пары внутренних геометрий (§ 52). Поэтому средняя метрика нормализованной гиперповерхности определяется заданием ее средних нормалей.

Предположим, в частности, что средняя метрика риманова, или, иначе говоря, пара внутренних связностей кодацциева. Произведя изменение нормализации, сопровождающееся составным преобразованием

$$\left(\frac{t_i}{2}, -\frac{t_i}{2} \right),$$

мы не изменим средней метрики, а чебышевский вектор, преобразуясь по закону (52,7), обратится в нуль, так что нормализация станет взаимной.

Так как новая нормализация будет взаимной, а средняя метрика — эквиаффинной, то будет выполнено условие 5) теоремы предыдущего параграфа, и, следовательно, новая нормализация будет вполне гармонична гиперповерхности.

Таким образом, для того чтобы средняя метрика была римановой, необходимо и достаточно, чтобы средняя нормализация была вполне гармонична поверхности.

Отметим, что достаточно потребовать гармонизма или сопряженности только для одной системы средних нормалей, так как другое условие выполнится автоматически вследствие взаимности средних нормалей между собою *).

§ 69. Проективный линейный элемент

В § 52 было показано, что тензор

$$B^k_{ij} = t^k_{ij} - (\delta^k_i t_j + \delta^k_j t_i + b_{ij} \tilde{b}^{km} t_m), \quad (1)$$

*) Это вытекает из сравнения условий 1) и 2) теоремы § 67.

где

$$t_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - G_{ij}^k, \quad (2)$$

b_{ij} — основной тензор пары, а t_i — его чебышевский вектор первого рода, инвариантен при составном преобразовании пары сопряженных связностей, определяемых коэффициентами Γ_{ij}^k и G_{ij}^k .

Применяя это к нормализованной гиперповерхности и считая, что b_{ij} есть тензор основной формы, а G_{ij}^k и Γ_{ij}^k — коэффициенты внутренних связностей первого и второго родов, мы видим, что тензор B_{ij}^k не зависит от нормализации, т. е. определяется (так же как и псевдотензор b_{ij}) самой гиперповерхностью.

То же самое справедливо и для тензора

$$D_{ijk} = b_{km} B_{ij}^m, \quad (3)$$

который определяется для данной гиперповерхности с точностью до множителя, причем того же множителя, который соответствует произволу в выборе тензора основной формы. Иначе говоря, однородная функция дифференциалов

$$ds = \frac{D_{ijk} du^i du^j du^k}{b_{pq} du^p du^q}, \quad (4)$$

которая называется *проективным линейным элементом гиперповерхности*, вполне определяется ее заданием.

Предположим теперь, что линейный элемент (4) задан и требуется определить гиперповерхность. Для этого рассмотрим тензор b_{pq} и, задавая произвольно дополнительный вектор ω_r , найдем коэффициенты $\mathcal{Z}_{ij}^k$ средней метрики Вейля. Затем будем искать гиперповерхность во взаимной нормализации.

В этом случае $t_i = 0$ и тензор

$$t_{ij}^k = B_{ij}^k = D_{ijm} \tilde{b}^{mk}$$

определится, а коэффициенты связности первого рода вычисляются по формуле

$$G_{ij}^k = \mathcal{Z}_{ij}^k - \frac{1}{2} t_{ij}^k.$$

Таким образом, основной тензор и связность первого рода гиперповерхности будут известны и в силу теоремы § 65 при любом n определится пара внутренних связностей, а при $n > 2$ — и сама гиперповерхность.

Конечно, линейный элемент, соответствующий некоторой действительно существующей гиперповерхности, должен удовлетворять ряду условий: это, по-первых, условие аполярности (52,12):

$$b^{ij}D_{ijk} = 0,$$

а во-вторых, те условия интегрируемости, которые должны связывать вычисляемые величины G_{ij}^k с b_{pq} .

Во всяком случае, мы можем сформулировать следующие теоремы:

1. При $n > 2$ две гиперповерхности с общим линейным элементом проективно тождественны.

2. При любом n две гиперповерхности с общим линейным элементом могут быть нормализованы таким образом, чтобы их внутренние геометрии совпадали между собою.

Устанавливая взаимную нормализацию на гиперповерхности, заданной ее линейным элементом, мы задавали тензор ω_k совершенно произвольно. Требуя, чтобы нормализация была вполне гармоничной гиперповерхности, можно считать, что ω_k есть градиентный вектор, а произвол в выборе этого градиента равносильно произволу в выборе множителя при b_{ij} , соответствующего основному тензору средней римановой метрики. Если нам удастся определить этот множитель однозначно в зависимости от вида линейного элемента, то определится и такая взаимная нормализация, которая будет зависеть только от вида гиперповерхности.

Способ выбора такой нормализации предложен Фубини, который берет какой-либо совместный инвариант псевдотензоров b_{pq} и D_{ijk} и требует, чтобы он был постоянным на гиперповерхности.

Простейшим примером такого инварианта является выражение

$$I = \frac{1}{2} \tilde{b}^{pq} B^i_{jp} B^j_{iq},$$

сохраняющее свой смысл и при $n = 2$.

Полагая этот (или, при $I = 0$, какой-либо другой) инвариант постоянным, мы определим нормирование, а следовательно, некоторую нормализацию, вполне определяемую самой гиперповерхностью. Соответствующие нормали Фубини называет *проективными нормальми* гиперповерхности. Следует, однако, отметить, что этот способ непригоден для поверхностей, характеризующихся обращением в нуль всех указанных инвариантов. При $n = 2$ это имеет место для поверхностей с $I = 0$, к которым мы еще вернемся.

§ 70. Общая нормализация пары гиперповерхностей

Две нормализованные гиперповерхности находятся в *общей нормализации*, если между их точками можно установить такое соответствие, при котором нормали первого рода и нормали второго рода являются общими для соответствующих точек этих гиперповерхностей. Мы будем также говорить, что нормализация каждой из этих гиперповерхностей *определена соответствием со второй*.

Пусть x и $\bar{x}$ — векторы точек двух гиперповерхностей S и $\bar{S}$, а X , — как обычно, вектор, определяющий вершину нормали первого рода. Если нормализация общая, то

$$\bar{x} = X + \sigma x. \quad (1)$$

Пользуясь уравнением (65,3С), мы получим

$$\partial_i \bar{x} + \lambda_i \bar{x} = (g_i^k + \sigma \delta_i^k) y_k + [g_i + \partial_i \sigma + \sigma (l_i + \lambda_i)] x.$$

В левой части этого равенства находится вектор точки, расположенной в касательной гиперплоскости гиперповерхности $\bar{S}$, и в силу равенства эта же точка лежит в касательной гиперплоскости S .

Чтобы обе эти плоскости пересекались по общей нормали второго рода, нужно потребовать выполнения равенства

$$g_i + \partial_i \sigma + \sigma (l_i + \lambda_i) = 0,$$

или, в силу (65,6),

$$g_i + \partial_i \sigma + 2\sigma \omega_i = 0, \quad (2)$$

В этом случае точки

$$\bar{y}_i = \partial_i \bar{x} + \lambda_i \bar{x} \quad (3)$$

расположены на нормали второго рода и являются опорными точками для $\bar{S}$.

Сравнив полученную формулу с (65,3А), мы приходим к следующему результату: *если две гиперповерхности находятся в общей нормализации, то вектор точки и ковектор касательной гиперплоскости каждой из них можно пронормировать так, что нормализатор первого рода одной гиперповерхности будет только знаком отличаться от нормализатора второго рода другой, так что*

$$\bar{l}_i = -\lambda_i, \quad \bar{\lambda}_i = -l_i. \quad (4)$$

Найдем условие, при наличии которого существует третья гиперповерхность S' , допускающая ту же нормализацию, что и первые две.

Для простоты предположим, что точка S' совпадает с вершиной нормали, и тогда, в силу условия (2),

$$g_i = 0. \quad (5)$$

Теперь, если точки поверхности S'

$$x' = x + \sigma X,$$

то σ должно удовлетворять уравнению

$$\partial_i \sigma + 2\omega_i \sigma = 0,$$

откуда

$$\omega_i = -\frac{1}{2} \partial_i \ln \sigma,$$

что возможно только при условии градиентности вектора ω_i , и тогда σ определится с точностью до постоянного множителя.

Таким образом, *если три гиперповерхности допускают общую нормализацию, то существует ∞^1 гиперповерхностей, находящихся в той же общей нормализации.*

В этом случае говорят также, что пара нормализующих многообразий X_n^1 и X_n^{n-1} расслояема в направлении нормали первого рода, а гиперповерхности S' называются *расслояющими*.

Примем теперь во внимание, что условие $\omega_i = \text{grad } \varphi$ характеризует пару внутренних связностей как кодаццие-

ву (§ 53, п. 2), и поэтому для того чтобы пара гиперповерхностей находилась в общей нормализации, которая расслояема в направлении нормали первого рода, необходимо и достаточно, чтобы пара внутренних связностей одной из гиперповерхностей (а следовательно, и обеих) была кодацциевой.

В заключение отметим две теоремы, непосредственно следующие из (4) при учете результата § 66.

1. Для того чтобы многообразие нормалей первого рода двух гиперповерхностей, находящихся в общей нормализации, было сопряжено одной из них, необходимо и достаточно, чтобы многообразие нормалей второго рода было гармонично второй.

2. Если пара нормализующих многообразий вполне гармонична гиперповерхности, то она вполне гармонична и всякой другой гиперповерхности, находящейся с первой в общей нормализации, и расслояема в направлении нормали первого рода.

§ 71. Аффинная нормализация

Нормализация X_m , заданной в аффинном пространстве, называется *аффинной*, если нормали второго рода лежат в несобственной гиперплоскости Ω этого пространства.

Аффинная нормализация поверхности подчинена той нормализации пространства, которая относит всякой его точке гиперплоскость Ω , и, следовательно, *внутренняя связность X_m , нормализованной аффинно, индуцируется направлением ее нормали первого рода*. Этот результат позволяет сделать следующие выводы:

1. Согласно теореме Г. Ф. Лаптева, приведенной в § 38, всякая связность без кручения может быть индуцирована на поверхности аффинного пространства достаточно высокого числа измерений.

Отсюда следует, что *всякую связность без кручения можно реализовать на нормализованной поверхности проективного пространства достаточно высокого числа измерений*. Очевидно, кроме того, что число измерений проективного пространства, заведомо вмещающего нормализованную поверхность X_m данной аффинной связности, ниже числа измерений аффинного пространства, индуцирующего эту связность, так как произвол в выборе нормалей первого

и второго родов выше произвола в выборе только первых из них. Однако вопрос об этом числе требует особого исследования, и мы не будем здесь касаться его.

2. Введем понятие *класса проективной вложенности* для аффинной связности без кручения A_m , понимая под этим число $p = n - m$, где n — наименьшее число измерений проективного пространства, вмещающего нормализованную поверхность с данной внутренней связностью.

Реализовав данную связность, мы можем преобразовать нормали второго рода так, чтобы они оказались в одной гиперплоскости Ω , после чего нормализация станет аффинной, а связность преобразуется проективно в связность A'_m . Очевидно, аффинный класс последней связности $a \leq p$. Теперь реализуем A'_m в пространстве $A_{n'}$, где $n' = m + a$, а затем произведем то преобразование нормалей второго рода, которое соответствует переходу от связности A'_m к связности A_m , и будем иметь $p \leq a$. Сравнив оба неравенства, мы видим, что $p = a$. Таким образом, для того чтобы проективный класс связности был равен p , необходимо и достаточно, чтобы существовало такое проективное преобразование, которое переводит эту связность в связность аффинного класса p . Так, например, проективно-евклидова связность имеет проективный класс $p = 0$, в чем мы убедились еще в § 62, рассматривая нормализованное проективное пространство.

Чтобы получить систему основных уравнений для поверхности, нормализованной аффинно, допускаем, что вектор ее точки находится в декартовом нормировании, так что

$$x\Omega = 1, \quad (1)$$

где Ω — ковектор несобственной гиперплоскости. Дифференцируя, будем иметь

$$\partial_i x \Omega = 0, \quad (2)$$

откуда следует, что точки $\partial_i x$ определяют нормаль второго рода, которая, по условию, лежит в гиперплоскости Ω , а следовательно, нормирование (1) каноническое.

Предположим теперь, что вершины нормали первого рода лежат в несобственной гиперплоскости, так что

$$X_a \Omega = 0, \quad a = \overline{1, n - m}. \quad (3)$$

Дифференцируя предыдущее равенство ковариантно по отношению к внутренней связности, мы получим

$$(p_{ji}x + b_{ij}^a X_a) \Omega = 0,$$

так что

$$p_{ij} = 0. \quad (4)$$

Наконец,

$$\Omega \nabla_i X_a = \Gamma_{ai} = 0. \quad (5)$$

Итак, основные уравнения аффинной нормализации имеют вид

$$\left. \begin{aligned} y_i &= \partial_i x, & (A) \\ \nabla_i y_i &= b_{ij}^a X_a, & (B) \\ \nabla_j X_a &= C_{ia}^k y_k, & (C) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где x — радиус-вектор точки поверхности, а X_a — направляющие векторы нормали первого рода.

Условия интегрируемости этих уравнений имеют вид

$$\left. \begin{aligned} b_{[ij]}^a &= 0; & (A) \\ R_{kji}^m &= -2b_{i[j}^a C_{k]a}^m, & (I) \\ \nabla_{[k} b_{j]i}^a &= 0; & (II) \\ \nabla_{[j} C_{i]a}^k &= 0, & (I) \\ R_{jia}^b &= -2b_{k[j}^b C_{i]a}^k. & (II) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \\ & (B) \\ & \\ & (C) \end{aligned} \quad (7)$$

Обратимся теперь к случаю гиперповерхности, нормализованной аффинно, и рассмотрим сначала основные уравнения и условия интегрируемости второго рода.

Основанием нормали второго рода гиперповерхности можно считать несобственную гиперплоскость, так что $\Xi = \Omega = \text{const}$, вследствие чего в уравнениях (65,3A'), (65,3B'), (65,3C') $\gamma_i^k = \gamma_i = l_i = 0$ и основные уравнения второго рода сводятся к двум:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_j \xi &= \eta_j + \lambda_j \xi, & (A') \\ \nabla_j \eta_{(i)} &= \lambda_j \eta_i + \pi_{ji} \xi + b_{ij} \Omega, & (B') \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

а условия их интегрируемости — к следующим пяти:

$$\left. \begin{array}{l} l_{[ij]} = 0, \quad (I) \\ \pi_{[ji]} + \nabla_{[j}\lambda_{i]} = 0; \quad (II) \end{array} \right\} (A') \\ \left. \begin{array}{l} \rho_{kji}^m = 2\pi_{[kj]}\delta_i^m - 2\delta_{[k}^m\pi_{j]i}, \quad (I) \\ \nabla_{[k}b_{j](i)} = 2\omega_{[k}b_{j]i}, \quad (II) \\ \nabla_{[k}\pi_{j](i)} = 0. \quad (III) \end{array} \right\} (B') \quad (9)$$

Условия (9B'I), (9B'III) показывают, что внутренняя геометрия второго рода проективно-евклидова; условия (9A'I) и (9B'II) просто соответствуют тому факту, что геометрия первого рода сопряжена с геометрией второго рода относительно тензора b_{ij} ; условие (9A'II) определяет нормализатор λ_i . Таким образом, для того чтобы пара сопряженных геометрий могла быть реализована на гиперповерхности, нормализованной аффинно, необходимо и достаточно, чтобы геометрия второго рода была проективно-евклидовой.

Этот результат может быть сформулирован следующим образом: для того чтобы связность без кручения была первого класса аффинной вложимости, необходимо и достаточно, чтобы она была сопряжена с некоторой проективно-евклидовой связностью; основной тензор этой сопряженной пары совпадает с тензором основной квадратичной формы гиперповерхности аффинного пространства, на которой реализуется эта связность.

Остановимся несколько подробнее на характере внутренней геометрии гиперповерхности. В § 62 мы ввели понятие нормализации с помощью связки. Эта связка для случая гиперповерхности имеет n измерений и содержит все нормали первого рода, которые, следовательно, проходят через одну точку. Внутренняя геометрия $N(X_m)$ совпадает в этом случае с внутренней геометрией связки Π_n , причем за основной элемент связки должны быть приняты нормали первого рода, а за нормализующий — плоскость $(n-1)$ -го измерения, принадлежащая связке.

Обращая всю эту схему по принципу двойственности, мы должны допустить, что все нормали второго рода $N(X_m)$ лежат в одной гиперплоскости, и, следовательно, снова приходим к случаю аффинной нормализации; двойственно предыдущему следует также считать, что

внутренняя геометрия второго рода X_m , нормализованной аффинно, совпадает с внутренней геометрией несобственной гиперплоскости, за элемент которой принята нормаль второго рода, а за нормализующий элемент — вершина нормали первого рода. Это и объясняет тот факт, что внутренняя геометрия поверхности, нормализованной аффинно, проективно-евклидова.

Основные уравнения и условия интегрируемости первого рода принимают для гиперповерхности, нормализованной аффинно, следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \partial_i x &= y_i, & (A) & & \nabla_j y_i &= b_{ij} X, & (B) \\ \nabla_{i+1} X &= g_i^k y_k, & (C) & \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{[ij]} &= 0; & (A) \\ R_{kji}^m &= -2b_{i[j} g_{k]}^m, & (I) \\ \nabla_{[k} b_{j]i} - b_{i[k} \lambda_{j]} &= 0; & (II) \\ \nabla_{[j} g_{i]}^k + \lambda_{[j} g_{i]}^k &= 0, & (I) \\ \nabla_{[j} \lambda_{i]} + g_{[j}^k b_{i]k} &= 0. & (II) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (A) \\ (B) \\ (C) \end{array} \quad (11)$$

§ 72. Сопряженная аффинная нормализация

Если нормали первого рода сопряжены гиперповерхности, то ковектор касательной гиперплоскости можно пронормировать канонически, и нормализатор λ_i обратится в нуль, уравнение (71,10C) примет вид

$$\partial_i X = g_i^k \partial_k x. \quad (1)$$

Этот результат может быть истолкован следующим образом: если рассмотреть гиперповерхность аффинного пространства, радиус-вектор точки которой есть X , то ее касательная гиперплоскость, определяемая векторами $\partial_i X$, параллельна касательной гиперплоскости T_n , которая определяется векторами $\partial_i x$.

Итак, для того чтобы многообразие нормалей первого рода было сопряжено гиперповерхности Σ аффинного пространства, необходимо и достаточно, чтобы нормали были параллельны радиусам-векторам некоторой другой поверхности Σ_0 , находящейся в таком соответствии с данной, при котором параллельны и соответствующие кас-

тельные гиперплоскости. В дальнейшем мы будем называть Σ_0 индикатрисой нормалей гиперповерхности, нормализованной аффинно и сопряженно *).

Рассмотрим несколько подробнее индикатрису нормалей Σ_0 . Будем считать, что она нормализована аффинно, причем за нормали первого рода примем прямые, исходящие из начала координат и параллельные нормалям исходной поверхности Σ . Нормализации обеих поверхностей, очевидно, определяют одну и ту же нормализацию несобственной гиперплоскости, за элемент которой будет принята общая нормаль второго рода, а за нормализующий элемент — общая точка нормалей первого рода. Но мы видели, что при аффинной нормализации внутренняя геометрия второго рода совпадает с геометрией нормализованной несобственной гиперплоскости, вследствие чего *внутренние геометрии второго рода гиперповерхности и индикатрисы ее нормалей совпадают между собою*.

Найдем также тензор основной формы поверхности Σ_0 . Ее касательная гиперплоскость ξ_0 параллельна касательной гиперплоскости ξ поверхности Σ , вследствие чего

$$\xi_0 = \xi + \lambda \Omega. \quad (2)$$

Точка Σ_0 определяется вектором

$$z = x_0 + X. \quad (3)$$

Поэтому тензор основной формы

$$b_{ij} = - \partial_i X \partial_j x = g^k_i b_{kj},$$

или, согласно (65,5), а также в силу того, что в нашем случае $\Omega = X\Omega = 0$,

$$b_{ij} = \pi_{ij}. \quad (4)$$

Нормаль первого рода гиперповерхности аффинного пространства определится единственным образом, если потребовать, чтобы она была взаимна нормали второго рода, расположенной в несобственной гиперплоскости. В этом случае она называется *аффинной нормалью* гиперповерхности.

*) Указанный способ нормализации был впервые установлен Мюллером для случая поверхности трехмерного пространства. (*релятивная геометрия поверхности*).

Так как нормали второго рода гармоничны поверхности, то для аффинных нормалей выполнено условие 2) заключительной теоремы § 67 и *аффинные нормали сопряжены гиперповерхности. Пара внутренних геометрий, индуцированных аффинными нормальями, вполне характеризуется тем, что она: а) эквиаффинная, б) чебышевская и с) ее геометрия второго рода проективно-евклидова.*

В случае произвольной аффинной нормализации аффинная нормаль определяется согласно (68,2) вектором $\alpha_i = -t_i$, т. е. является прямой пересечения гиперплоскостей

$$\tau_i = \eta_i - t_i \xi, \quad (5)$$

где ξ и η_i — ковекторы касательной гиперплоскости и опорных гиперплоскостей нормали первого рода, а t_i — чебышевский вектор тензора основной квадратичной формы b_{ij} .

В центроаффинном пространстве всякую гиперповерхность можно нормализовать, предполагая, что нормали второго рода лежат в несобственной гиперплоскости Ω , а нормали первого рода проходят через центр X_0 пространства.

Обе внутренние геометрии гиперповерхности, нормализованной центроаффинно, будут проективно-евклидовы, так как, согласно результатам § 62 и предыдущего § 71, они совпадают с внутренней геометрией несобственной гиперплоскости, в которой задано соответствие между точками пересечения нормалей первого рода с несобственной гиперплоскостью и нормальями второго рода, т. е. плоскостями пересечения касательных гиперплоскостей поверхности с Ω .

Так как нормализация вполне гармонична гиперповерхности, то *внутренние геометрии будут также эквиаффинными*, а значит, и пара геометрий, определенная в несобственной гиперплоскости, будет эквиаффинной, а соответствие, задаваемое нормальями, будет гармоническим.

Представим теперь, что в несобственной гиперплоскости задано гармоническое соответствие. Нормируя точку X этой гиперплоскости канонически, мы определим нормализующий элемент P_n точками $\partial_i X$. Пусть x_0 — точка вне Ω . Рассмотрим гиперповерхность Σ , точка которой определена вектором

$$x = x_0 + X, \quad (6)$$

Так как

$$\partial_i x = \partial_i X, \quad (7)$$

то P_n может служить нормалью второго рода для Σ . Таким образом, для того чтобы соответствие между точками P_n и его гиперплоскостями P_{n-1} было гармоническим, необходимо и достаточно, чтобы точки P_n были проекциями точек x некоторой гиперповерхности из центра x_0 , а P_n принадлежали гиперплоскостям, касающимся той же гиперповерхности в соответствующих точках. Мы будем говорить, что Σ есть производящая гиперповерхность данного гармонического соответствия.

Так как гиперповерхность, нормализованную центроаффинно, можно рассматривать как такую, которая совпадает с индикатрисой своих нормалей, то тензор ее основной квадратичной формы

$$b_{ij} = \pi_{ij}.$$

С другой стороны, вследствие (71,9B'I)

$$\rho_{kji}^m = -2\delta_{[k}^m \pi_{j]i},$$

или

$$\rho_{ji} = -b_{ij}(n-1). \quad (8)$$

Итак, тензор Риччи гармонического соответствия на P_n совпадает с тензором основной квадратичной формы производящей гиперповерхности этого соответствия.

Если предположить для симметрии, что в случае центроаффинной нормализации вершина нормалей первого рода совпадает с центром пространства O , а основание нормалей второго рода — с несобственной гиперплоскостью Ω , которая пронормирована так, чтобы $O\Omega = 1$, то основные уравнения гиперповерхности примут вследствие (7) и (8) следующий вид:

$$\left. \begin{array}{lll} \partial_i x = y_i, & (A) & \partial_i \xi = \eta_i, & (A') \\ \nabla_j y_i = \frac{R_{ji}}{n-1} (O - x), & (B) & \nabla_j \eta_i = \frac{\rho_{ji}}{n-1} (\Omega - \xi), & (B') \\ \partial_i O = 0, & (C) & \partial_i \Omega = 0. & (C') \end{array} \right\} (9)$$

ГЛАВА VI

ПОЛЯРНАЯ НОРМАЛИЗАЦИЯ

§ 73. Линейный элемент проективной метрики

Если в пространстве P_n введена проективная метрика, определяемая поляритетом с основным тензором $a_{\alpha\beta}$, установлено скалярное произведение

$$xy = a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta \quad (1)$$

для векторов, соответствующих точкам пространства, и установлено нормирование Вейерштрасса

$$x^2 = \sigma = \pm 1, \quad (2)$$

то расстояние между точками определяется соотношением

$$\cos \frac{\varphi}{r} = \sigma xy, \quad (3)$$

причем σ выбирается так, чтобы для достаточно близких точек правая часть была положительной.

Предположим, что точка x смещается по некоторой кривой, а $\varphi \approx ds$ есть бесконечно малое расстояние, которое она проходит. Разлагая правые и левые части (3) в ряд Тейлора и пренебрегая членами, порядок которых выше двух, мы получим

$$1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi}{r} \right)^2 + \dots = \sigma x \left(x + dx + \frac{1}{2} d^2x + \dots \right).$$

Но вследствие (2)

$$\sigma x^2 = 1, \quad x dx = 0, \quad x d^2x = -dx^2, \quad (4)$$

откуда

$$ds^2 = r^2 \sigma dx^2 = c dx^2, \quad (5)$$

причем масштабную константу c всегда можно выбрать так, чтобы ее абсолютная величина была равна единице. Если в пространстве введены криволинейные координаты

и

$$x = x(u^1, \dots, u^n),$$

то

$$ds^2 = (\partial_i x \partial_j x) du^i du^j = g_{ij} du^i du^j. \quad (6)$$

Полученное выражение для ds^2 показывает, что проективная метрика является частным видом метрики Римана. Ниже (§ 75) мы выясним, какое место занимает эта метрика в той классификации, которая установлена в предыдущих главах.

Касательная прямая кривой линии

$$x = x(t)$$

проективного пространства определяется точками x и dx (§ 56). Этот способ остается в силе и для рассматриваемого пространства проективной метрики, так как его фундаментальная группа является подгруппой группы проективных преобразований.

Если точки рассматриваемой кривой не принадлежат абсолюту Q_{n-1} , то вектор x можно пронормировать по Вейерштрассу; если же все эти точки изотропны, т. е. принадлежат Q_{n-1} , то $x^2 = 0$. В обоих случаях справедливы соотношения (4), показывающие, что точка dx принадлежит полюре точки x . Если две кривые пересекаются в точке x , то, согласно § 23, угол между ними, т. е. угол θ между их касательными, будет равен расстоянию между точками $d_1 x$, $d_2 x$, где знаки d_1 и d_2 соответствуют дифференцированию вдоль обеих рассматриваемых линий, так что

$$\cos \frac{\theta}{r} = \frac{d_1 x d_2 x}{\sqrt{d_1 x^2} \sqrt{d_2 x^2}} = \frac{g_{ij} d_1 u^i d_2 u^j}{d_1 s d_2 s}. \quad (7)$$

Таким образом, для неизотропных кривых проективная метрика углов совпадает с угловой метрикой соответствующего риманова пространства, однако формула (7) не теряет смысла и для кривых, принадлежащих абсолюту.

§ 74. Полярные нормализации

Если в пространстве P_{n+1} задан поляритет и некоторая поверхность X_m , то нормализация последней называется *полярной* относительно этого поляритета, если нормали первого и второго родов, соответствующие каждой точке x ,

являются сопряженными полярами. Поляритет, определяющий данную полярную нормализацию, мы будем называть *абсолютным поляритетом* этой нормализации.

Условие полярной сопряженности нормалей имеет вид

$$y_i X_a = 0. \quad (1)$$

Введем метрические тензоры

$$g_{ij} = y_i y_j, \quad (2)$$

$$G_{ab} = X_a X_b. \quad (3)$$

Будем говорить, что первый из них определяет *внутреннюю*, а второй — *внешнюю* угловую метрику. Заметим также, что тензор g_{ij} имеет вес $q = 2$, и будем в дальнейшем предполагать его невырожденным, так что

$$g = \text{Det} \| g_{ij} \| \neq 0^* \quad (4)$$

Приняв во внимание деривационные уравнения

$$\nabla_j^1 y_i = b_{ji}^a X_a, \quad \nabla_j X_a = C_{j.a}^k y_k$$

и продифференцировав с их помощью условие (1), получим

$$b_{ji}^a G_{ba} + C_{j.a}^k g_{ki} = 0,$$

или, пользуясь метрическими тензорами для перебрасывания индексов,

$$C_{j.a}^k = -b_{j.k}^a. \quad (5)$$

После этого деривационные уравнения примут вид

$$\left. \begin{aligned} y_i &= \nabla_j^1 x, & (A) \\ \nabla_j^1 y_i &= b_{ji}^a X_a, & (B) \\ \nabla_j X_a &= -b_{j.a}^k y_k. & (C) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Дифференцирование (2) дает

$$\nabla_k^2 g_{ij} = 0. \quad (7)$$

Следовательно, *внутренняя геометрия поверхности, нормализованной полярно, есть геометрия Вейля.*

Наконец, дифференцируя (3), получим

$$\nabla_k G_{ab} = 0. \quad (8)$$

*) Поверхности, на которых это условие не выполняется, называют обычно *изотропными*. В дальнейшем мы эти поверхности рассматривать не будем.

Уравнение (6С) и формула (8) допускают следующее истолкование. Рассмотрим точку $Z = v^a X_a$, принадлежащую нормали первого рода. Для этой точки

$$dZ = \delta v^a X_a - b_j^{\cdot k} v^a du^j y_k,$$

и если $\delta v^a = 0$, то $X dZ = 0$, так что касательный вектор кривой $Z = Z(t)$ ортогонален нормали первого рода.

Таким образом, если вектор v^a переносится параллельно во внешней связности с объектом Γ_{ja}^b , то соответствующая ему точка переносится ортогонально нормали первого рода, а уравнение (8) показывает, что угловая метрика сохраняется при этом перенесении.

С использованием соотношений (5), (7) и (8) условия интегрируемости упрощаются по сравнению с общим случаем (60,2) и сводятся к следующим:

$$\left. \begin{array}{ll} b_{[ji]}^a = \Omega_{ji} x^a, & \text{(I)} \\ \nabla_i^1 x^a = 0; & \text{(II)} \end{array} \right\} \quad \text{(A)} \quad \left. \begin{array}{ll} R_{kji}^m = 2b_{a[k}^m b_{j]i}^a, & \text{(I)} \\ \nabla_{[k}^1 b_{j]i}^a = 0; & \text{(II)} \end{array} \right\} \quad \text{(B)} \quad \left. \begin{array}{l} R_{kja}^b = 2b_{a[j}^m b_{k]m}^b. \end{array} \right\} \quad \text{(C)} \quad (9)$$

Пользуясь произволом в выборе вершин нормали первого рода, можно положить

$$G_{ab} = \text{const.} \quad (10)$$

Тогда уравнение (8) примет вид

$$\Gamma_{ia}^c G_{cb} + \Gamma_{ib}^c G_{ac} = 0. \quad (8')$$

Приведенные уравнения и условия их интегрируемости получаются из (60,6) и (60,7) простой заменой $C_j^{\cdot k} a$ на $-b_j^{\cdot k} a$.

§ 75. Внешняя полярная нормализация

Для дальнейшей специализации следует разделять два случая: 1) точка поверхности X_m принадлежит абсолюту или 2) точка X_m не принадлежит абсолюту. В первом случае мы будем называть полярную нормализацию *внешней*, а во втором — *внутренней*. В этом параграфе мы

займемся только внешней нормализацией, полагая $x^2 \neq 0$, или, нормируя по Вейерштрассу,

$$x^2 = \varepsilon = \pm 1. \quad (1)$$

Но точка x сопряжена всякой точке нормали первого рода, вследствие чего

$$xy_i = 0, \quad x \partial_i x - l_i x^2 = -\varepsilon l_i = 0, \quad (2)$$

или

$$l_i = 0. \quad (3)$$

Дифференцируя (1) и пользуясь приведенным деривационным уравнением

$$\nabla_j y_i = p_{ji} x + b_{ji}^a X_a, \quad a = 1, \dots, n-m,$$

получим

$$\Gamma_{ka} = 0, \quad (a)$$

$$p_{ij} = -\varepsilon g_{ij}. \quad (b)$$

Таким образом, приведенные деривационные уравнения и условия их интегрируемости сводятся к следующим:

$$\left. \begin{aligned} y_i &= \partial_i x; & (A) \\ \nabla_j y_i &= -\varepsilon g_{ij} x + b_{ij}^a X_a; & (B) \\ \nabla_j X_a &= -b_{j \cdot a}^k y_k; & (C) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{[ij]}^a &= 0; & (A) \\ R_{kji \cdot}^m &= -2\varepsilon \delta_{[k}^m g_{j]i} - 2b_{a[j \cdot}^m b_{k]i}^a, & (I) \\ \nabla_{[k} b_{j]i}^a &= 0; & (II) \\ R_{jia \cdot}^b &= 2b_{a[i \cdot}^k b_{j]k \cdot}^b. & (C) \end{aligned} \right\} \quad (B) \quad (5)$$

При этом надлежит иметь в виду, что ковариантное дифференцирование в уравнениях (4C) и (5BII) соответствует связности с объектом Γ_{ia}^b , приведенной в смысле § 54, а тензор кривизны в (5C) соответствует этой связности.

Для неизотропной гиперповерхности произойдут еще дальнейшие упрощения. Ее деривационные уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} y_i &= \partial_i x; & (A) \\ \nabla_j y_i &= -\varepsilon g_{ij} x + b_{ij} X; & (B) \\ \nabla_j X &= -b_{j \cdot}^k y_k, & (C) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

а условия интегрируемости сводятся к следующим:

$$\left. \begin{aligned} b_{[ij]} &= 0; & (A) \\ R_{kji}{}^m &= -2\varepsilon\delta_{[k}^m g_{j]i} - 2b_{[j}{}^m b_{k]i}, & (I) \\ \nabla_{[k} b_{j]i} &= 0. & (II) \end{aligned} \right\} (B) \quad (7)$$

На уравнения (6) можно смотреть как на основные, а условия их интегрируемости (7) являются таковыми для *неизотропной гиперповерхности пространства постоянной кривизны*, но они не теряют своего смысла и в том случае, если абсолют вырожден.

§ 76. Полярная нормализация пространства

Пространство P_n нормализовано полярно, если всякой его точке отнесена P_{n-1} , полярная относительно некоторого абсолюта Q_{n-1} . Внутренняя геометрия $N(P_n)$ будет эквивариантной, а условия интегрируемости основных уравнений сведутся к следующим:

$$\left. \begin{aligned} g_{[ij]} &= 0; & (A) \\ \nabla_k g_{ij} &= 0; & (B) \\ R_{kji}{}^m &= -2\varepsilon\delta_{[k}^m g_{j]i}. & (B') \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При произвольном ранге матрицы $g = \|g_{ij}\|$ эти условия характеризуют метрическую связность, которую мы будем называть *метрической связностью постоянной кривизны*; если же ранг g полный, т. е. пространство риманово, то вследствие своей проективно-евклидовости оно будет пространством постоянной кривизны, или S_n , в обычном смысле этого слова.

Таким образом, мы приходим к теореме: *риманово пространство, определенное линейным элементом проективной метрики с невырождающимся абсолютom, есть пространство постоянной кривизны.*

В § 62 мы видели, что пара связностей, определенных гармоническими соответствиями, в которых точки и гиперплоскости $N(P_n)$ меняются местами, сопряжена относительно тензора Риччи, общего этим связностям. В случае полярного соответствия из (1B') следует, что

$$R_{ji} = -\varepsilon(n-1)g_{ji}, \quad (2)$$

и пара указанных связностей становится самосопряженной.

Предположим теперь обратное. Пусть нам дано некоторое соответствие точек и гиперповерхностей, определяющее связность, которая не зависит от того, точка или гиперплоскость принята за основной элемент соответствия. В таком случае согласно (62,12)

$$\rho_{ji} = R_{ji} = R_{ij}, \quad (3)$$

и, значит, внутренняя геометрия соответствия эквиаффинная, а соответствие гармоническое. Но в таком случае связности первого и второго рода сопряжены относительно R_{ij} , а совпадая между собою, они образуют риманову самосопряженную пару. Приняв, наконец, во внимание условие эквипроективности, мы получим равенства

$$R_{[ij]} = 0, \quad \nabla_k R_{ji} = 0, \quad R_{kji}^m = c \delta_{[k}^m R_{j]i}, \quad (4)$$

которые совпадают с равенствами (1). Но, как было показано в § 62, внутренняя геометрия определяет соответствие точек и гиперплоскостей, следовательно, рассматриваемое соответствие есть поляритет.

Таким образом, *полярное соответствие точек и гиперплоскостей вполне характеризуется тем, что порождаемые им внутренние геометрии образуют самосопряженную пару.*

Так как полярное соответствие принадлежит к числу гармонических, то, как было показано в § 72, оно определяется центроаффинной нормализацией некоторой гиперповерхности, причем ее внутренние геометрии совпадают с внутренними геометриями поляритета, т. е. образуют самосопряженную пару.

Уравнения (72,9) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \partial_i x &= y_i, & \partial_i \xi &= \eta_i, \\ \nabla_j y_i &= \frac{R_{ji}}{n-1} (O - x), & \nabla_j \eta_i &= \frac{R_{ji}}{n-1} (\Omega - \xi), \\ \partial_i O &= 0, & \partial_i \Omega &= 0, \end{aligned}$$

причем ковариантное дифференцирование происходит по отношению к одной и той же связности. Следовательно, решения обеих систем уравнений могут различаться только линейной подстановкой, так что

$$\xi_\alpha = a_{\alpha\beta} x^\beta, \quad \Omega_\alpha = a_{\alpha\beta} O^\beta$$

с постоянными $a_{\alpha\beta}$.

Но в силу инцидентности x и ξ

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0,$$

и, значит, *поляритет в гиперплоскости P_n индуцируется перспективно гиперповерхностью второго порядка, находящейся в центроаффинной нормализации, причем ее центр O совпадает с полюсом данной гиперплоскости P_n .*

Возвращаясь к случаю $N(X_m)$, нормализованной полярно, заметим, что ее нормализация подчинена полярной нормализации пространства, и, следовательно, ее внутренняя геометрия индуцирована геометрией метрического пространства постоянной кривизны. В частности, условия (75,4), (75,5) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы неизотропная поверхность могла быть вложена в такое пространство.

В случае невырожденного абсолюта теорию гиперповерхности можно развивать, пользуясь принципом двойственности. Так, внутренняя геометрия гиперповерхности есть риманова геометрия, линейный элемент которой равен расстоянию между ее бесконечно близкими точками. Согласно принципу двойственности геометрия второго рода гиперповерхности есть метрика Римана, линейный элемент которой равен углу между бесконечно близкими касательными гиперплоскостями. Такая метрика называется *угловой метрикой гиперповерхности*.

В согласии с общей теорией можно сформулировать такую теорему: *римановы связности, определенные на гиперповерхности пространства постоянной кривизны метрикой расстояний между точками и метрикой углов между гиперплоскостями, сопряжены относительно тензора основной проективной формы и образуют пару внутренних геометрий, соответствующих нормализации, которая полярна по отношению к абсолюту проективной метрики пространства.*

§ 77. Евклидова нормализация

Евклидово пространство E_n характеризуется с проективной точки зрения заданием абсолюта второго класса и $(n-1)$ -го ранга, или невырожденной Q_{n-2} в несобственной гиперплоскости. Поляритет, определяемый этим абсолютом, относит всякой P_{n-m} , не лежащей в несобственной

P_{n-1} , определенную несобственную P_{m-1} . Несобственные P_{m-1} и P_{n-m+1} , принадлежащие ее полюре, сопряжены полярно относительно несобственной абсолютной Q_{n-2} .

Полярная нормализация X_m в E_n определяется согласно общему условию тем, что нормаль первого рода полярно сопряжена относительно абсолюта несобственной нормали второго рода, лежащей в касательной T_m . Иначе говоря, *нормаль первого рода вполне ортогональна касательной T_m .*

Нормализация, полярная относительно абсолюта E_n , является частным случаем аффинной нормализации, и ее основные уравнения совпадают с уравнениями (71,6), т. е. имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \partial_i x &= y_i, & (A) \\ \nabla_j y_i &= b_{ij}^a X_a, & (B) \\ \nabla_j X_a &= C_{ja}^k y_k, & (C) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где x — радиус-вектор точки поверхности, а X_a ($a = \overline{1, n-m}$) — направляющие векторы нормали первого рода.

Для векторов, определяющих точки несобственной гиперплоскости, абсолюта Q_{n-2} устанавливает метрику, причем имеет место следующая таблица скалярных произведений:

	y_i	X_a
y_i	g_{ij}	0
X_b	0	G_{ab}

(2)

Тензор g_{ij} определяет метрику на X_m , а величины G_{ab} можно считать постоянными.

Дифференцируя соотношение $g_{ij} = y_i y_j$, мы получим уравнение

$$\nabla_k g_{ij} = 0, \quad (3)$$

которое показывает, что при $g \neq 0$ внутренняя геометрия первого рода $N(X_m)$ есть риманова геометрия, определенная метрикой пространства E_n . Составляя другие скалярные произведения, дифференцируя и рассуждая так же,

как в § 74, мы получим

$$C_{ij}^a = -b_{ij}^a,$$

так что основные уравнения примут вид

$$\partial_i x = y_i, \quad \nabla_j y_i = b_{ij}^a X_a, \quad (4)$$

$$\nabla_j X_a = -b_j^k{}_{\cdot a} y_k, \quad (5)$$

а условия их интегрируемости —

$$\left. \begin{aligned} b_{[ij]}^a &= 0; \\ R_{kji}^m &= 2b_{a[k}^m b_{j]i}^a, \quad (I) \\ \nabla_{[k} b_{j]i}^a &= 0; \\ R_{ija}^b &= 2b_{a[j}^k b_{i]k}^b \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (A) \\ (B) \\ (II) \\ (C) \end{array} \quad (6)$$

При сравнении оказывается, что эти основные уравнения и условия их интегрируемости представляют частный случай (75,4) и (75,5), если положить в них $\varepsilon = 0$. Это позволяет рассматривать теорию поверхностей в пространстве E_n как частный случай такой теории в пространстве S_n .

Для гиперповерхности основные уравнения и условия их интегрируемости принимают еще более простой вид:

$$\partial_i x = y_i, \quad \nabla_j y_i = b_{ij} X, \quad \nabla_i X = b_j^k y_k, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{[ij]} &= 0, \quad \nabla_{[k} b_{j]i} = 0, \\ R_{kjim} &= 2b_{i[j} b_{i]m}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Так как нормализация аффинная, то внутренняя геометрия второго рода X_n в E_{n+1} будет совпадать с внутренней геометрией, определяемой ее нормализацией в несобственной P_n . Но это есть внутренняя геометрия абсолютного поляритета и, следовательно, есть геометрия постоянной кривизны.

Абсолютный поляритет определяется также поверхностью второго порядка, которая пересекает несобственную P_n по абсолютной Q_{n-1} (§ 76), т. е. гиперсферой. Ее внутренняя геометрия второго и первого родов совпадает с внутренней геометрией абсолютного поляритета, а сама гиперсфера находится с данной X_n в соответствии, при котором нормали к обеим поверхностям параллельны в соответствующих точках. Такое отображение гиперповерхности на гиперсферу называется *сферическим*. Таким образом,

связность второго рода гиперповерхности X_n , нормализованной полярно в E_{n+1} , совпадает с внутренней геометрией гиперсферы ее сферического отображения.

Приняв во внимание, что расстояние между двумя бесконечно близкими точками гиперсферы равно углу между касательными гиперплоскостями в этих точках, а эти гиперплоскости соответственно параллельны касательным гиперплоскостям X_n , можно заключить также, что в E_{n+1} , так же как и в S_{n+1} , геометрия второго рода $N(X_n)$ является римановой геометрией, линейный элемент которой определяет угловую метрику касательных гиперплоскостей X_n .

§ 78. E_n как нормализованное пространство гиперплоскостей

Своеобразную интерпретацию общей схемы нормализованного пространства можно получить, рассматривая пространство E_n как множество гиперплоскостей и имея в виду, что абсолют этого пространства есть образ второго класса и ранга n .

Согласно общей теории полярных нормализаций, основные уравнения, которым удовлетворяет гиперплоскость E_n , будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \eta_i &= \partial_i \xi, & (A) \\ \nabla_j \eta_i &= \varepsilon \gamma_{ji} \xi, & (B) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где γ_{ji} — основной тензор угловой метрики, так что

$$d\varphi^2 = \gamma_{ij} du^i du^j \quad (2)$$

определяет элемент угла между двумя смежными гиперплоскостями. Ранг матрицы $\|\gamma_{ij}\|$ равен $n - 1$ вследствие того, что абсолют пространства имеет ранг на единицу ниже полного. Всякому контравариантному вектору v^i соответствует смещение гиперплоскости ξ , при котором $d\xi = \eta_i v^i$. Этому же вектору можно поставить в соответствие гиперпрямую P_{n-2} , по которой ξ пересекается с $\xi + d\xi$. Обратно, всякой гиперпрямой, принадлежащей ξ , соответствует определенный псевдовектор.

Обобщая это замечание, мы можем сказать, что простые контравариантные k -псевдовекторы находятся в однозначном соответствии с многообразиями P_{n-k-1} , принадлежащими гиперплоскости ξ .

Вводя в рассмотрение некоторый n -вектор $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ и взаимный ему n -вектор $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n}$, мы можем отнести всякому простому k -вектору дополнительный и тоже простой $(n - k)$ -вектор, контраградиентный первому *). Этот $(n - k)$ -вектор можно также считать представителем P_{n-k-1} , принадлежащего ξ . В частности, ковариантный вектор v_k представляет некоторое P_0 , т. е. ковариантный псевдовектор представляет точку, принадлежащую гиперплоскости ξ .

К этому же представлению можно прийти и другим путем.

С каждой гиперплоскостью ξ связан репер, состоящий из этой гиперплоскости и гиперплоскостей η_i . Рассмотрим взаимный ему репер, состоящий из вершин данного, представляемых векторами X, X^j так, чтобы при этом имела место следующая таблица следов:

	X	X^j
ξ	1	0
η_i	0	δ_i^j

(3)

Эта таблица показывает, что точки X^j лежат в гиперплоскости ξ , а точка X , в которой пересекаются гиперплоскости η_i , полярно сопряженные ξ , есть полюс этой гиперплоскости, т. е. общая несобственная точка всех прямых, которые ей ортогональны.

Всякую точку, принадлежащую гиперплоскости ξ , можно представить вектором

$$w = w_i X^i, \quad (4)$$

и, следовательно, ее положение действительно определяется заданием ковариантного псевдовектора w_i .

Пользуясь основными уравнениями (1), можно найти уравнения, которым удовлетворяют векторы вершин точечного репера. Используя таблицу, мы без труда

*) Два поливектора называются *дополнительными*, если они связаны соотношением

$$a_{i_1 \dots i_{n-k}} = \varepsilon_{i_1 \dots i_{n-k} i_{n-k+1} \dots i_n} a^{i_{n-k+1} \dots i_n}.$$

получим

$$\nabla_j X = -\varepsilon \gamma_{jk} X^k, \quad \nabla_j X^i = -\delta_j^i X. \quad (5)$$

Чтобы установить геометрическое значение перенесения, соответствующего внутренней геометрии нормализованного пространства гиперплоскостей, рассмотрим точку (4), принадлежащую ξ , и предположим, что соответствующий ей ковектор переносится параллельно. В таком случае

$$dw = \delta w_i X^i + w_i \delta X^i = \lambda X,$$

а это значит, что точка w смещается в направлении полюса гиперплоскости ξ , т. е. ортогонально этой гиперплоскости.

Таким образом, внутренняя геометрия евклидова пространства E_n , рассматриваемого как место своих гиперплоскостей, есть эквипроективная метрическая геометрия с основным тензором γ_{ij} ранга $n - 1$. Линейный элемент этого пространства определяет угол между гиперплоскостями, а перенесение ковариантных векторов характеризует такое смещение точек, которое происходит ортогонально гиперплоскости, содержащей точку, соответствующую рассматриваемому ковектору.

Что касается геодезических линий внутренней геометрии, то они совпадают с гиперпрямыми пространства, т. е. характеристическими многообразиями пучков гиперплоскостей. Это вполне соответствует также и тому факту, что всякая точка неподвижной гиперпрямой, остающаяся неподвижной, может считаться переносимой ортогонально.

В заключение отметим еще одну особенность рассматриваемой связности. Так как ранг тензора γ_{ij} равен $n - 1$, то существует вектор γ^i , удовлетворяющий условию

$$\gamma_{ik} \gamma^k = 0. \quad (6)$$

Дифференцируя его ковариантно и имея в виду, что

$$\nabla_k \gamma_{ij} = 0,$$

мы получим

$$\gamma_{ij} \nabla_k \gamma^j = 0,$$

откуда

$$\nabla_k \gamma^j = \lambda_k \gamma^j, \quad (7)$$

так как всякий вектор, удовлетворяющий условию (6), коллинеарен вектору γ^i .

Составим условие интегрируемости уравнений (7), учитывая структуру тензора кривизны, выраженную уравнениями (76,4). Эти условия дают

$$\nabla_{[i}\lambda_{k]}\gamma^j = R_{ikm}{}^j\gamma^m = \delta_{[i}^j\gamma_{k]m}\gamma^m = 0.$$

Отсюда следует, что γ^i можно пронормировать так, чтобы выполнялось условие

$$\nabla_k\gamma^i = 0. \quad (8)$$

Вектор γ^i соответствует гиперпрямой, принадлежащей гиперплоскости $\Omega = \gamma^j\eta_j$, а так как

$$\Omega\xi = \gamma^j\eta_j(\eta_i v^i + \xi v) = 0,$$

то эта гиперплоскость сопряжена любой другой гиперплоскости пространства и, следовательно, является несобственной. Итак, вектор γ^i , удовлетворяющий условию (8), соответствует несобственной гиперпрямой гиперплоскости ξ .

§ 79. Внутренняя полярная нормализация

В случае внутренней нормализации точка поверхности лежит на абсолюте, так что

$$x^2 = 0. \quad (1)$$

Нормировка x остается неопределенной, и это заставляет нас снова пользоваться продолженным дифференцированием. Применяя его и полагая, как и прежде,

$$y_i = \nabla_i^1 x, \quad (2)$$

мы получаем из (1)

$$xy_i = 0. \quad (3)$$

Условие (1) выполняется для действительной точки только в том случае, если левая часть уравнения абсолюта не является положительно определенной формой; поэтому всегда можно, выбрав за одну из вершин нормали первого рода точку x , выбрать еще одну вершину X на абсолюте и предположить

$$xX = 1. \quad (4)$$

В результате этих соглашений мы получим следующую таблицу скалярных произведений:

	x	X	X_a	y_i
x	0	1	0	0
X	1	0	0	0
X_b	0	0	G_{ab}	0
y_j	0	0	0	g_{ij}

$$a, b = \overline{1, n-m}; \quad i, j = \overline{1, m}. \quad (5)$$

Заметим, что в силу (4) X является псевдовеличиной, спутником x веса $q = -1$, что и нужно учитывать при продолженном дифференцировании.

Запишем деривационные уравнения (74,2), сравнив их с (60,4), в виде

$$\nabla_j^1 y_i = p_{ji}x + b_{ji}^x X + b_{ji}^a X_a, \quad (\alpha)$$

$$\nabla_j X_a = -b_{j \cdot a}^k y_k + \Gamma_{j \cdot a}^x X + \Gamma_{ja}^x x, \quad (\beta)$$

$$\nabla_{j1} X = -b_{j \cdot x}^k y_k + \Gamma_{j \cdot x}^a X_a + \Gamma_{jx}^x X + \Gamma_{jx}^x x, \quad (\gamma)$$

где x — индекс, соответствующий вектору X .

Заметим, что в (β) ковариантное дифференцирование производится в связности, приведенной в соответствие с выбором вершин x и X .

Рассмотрим значения скалярных произведений из таблицы (5) и будем дифференцировать их, пользуясь уравнениями (α) , (β) , (γ) . Это позволит нам заметить следующее:

$$\text{из } xX = 1 \text{ следует } \Gamma_{jx}^x = 0; \quad (a)$$

$$\text{из } X_a X = 1 \text{ следует } \Gamma_{jx}^b G_{ba} = -\Gamma_{ja}, \quad (b)$$

$$\text{или (в случае невырожденного } G_{ba}) \Gamma_{j \cdot x}^a = -\Gamma_{j \cdot}; \quad (b)$$

$$\text{из } X^2 = 0 \text{ следует } \Gamma_{jx} = 0; \quad (c)$$

$$\text{из } X_a x = 0 \text{ следует } \Gamma_{j \cdot a}^x = 0; \quad (d)$$

$$\text{из } X y_i = 0 \text{ следует } \left. \begin{aligned} b_{jix} &= p_{ji}, \\ b_{j \cdot x}^k &= p_{j \cdot}^k; \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

или

$$\text{из } x y_i = 0 \text{ следует } b_{ji} = -g_{ij}. \quad (f)$$

Таким образом, деривационные уравнения внутренней нормализации имеют вид

$$\left. \begin{aligned} y_i &= \nabla_j^1 x, & (A) \\ \nabla_j^1 y_i &= p_{ji}x - g_{ji}X + b_{j \cdot i}^a X_a, & (B) \\ \nabla_j X_a &= -b_{j \cdot a}^k y_k + \Gamma_{ja}x, & (C) \\ \nabla_j^1 X &= -p_{j \cdot}^k y_k - \Gamma_{j \cdot}^a X_a & (C^*) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и их условия интегрируемости сводятся к следующим:

$$\left. \begin{aligned} b_{[ij]}^a &= 0, & (I) \\ p_{[ji]} + \nabla_{[j} l_{i]} &= 0; & (II) \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{kji}^m &= 2p_{[kj]} \delta_i^m - 2\delta_{[k}^m p_{j]i} + \\ &\quad + 2b_{a[k}^m b_{j]i}^a - 2g_{i[j} p_{k]}^m, & (I) \\ \nabla_{[k}^1 b_{j]i}^a + g_{i[k} \Gamma_{j]}^a &= 0, & (II) \\ \nabla_{[k} p_{j]i} + b_{i[j}^a \Gamma_{k]a} &= 0; & (III) \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{jia}^c &= 2b_{[i \cdot}^{ck} b_{j]ka}; & (C) \\ \nabla_{[j}^1 \Gamma_{i]}^a &= b_{[j \cdot}^{a.k} p_{i]k}. & (C^*) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В случае $X_{n-2} \subset Q_{n-1}$, т. е. гиперповерхности многообразия точек квадрики, нормаль первого рода определяется точками x , X и еще одной точкой, вектор которой мы обозначим через ξ . Эта последняя точка не принадлежит Q_{n-1} , и мы будем считать ее нормализованной по Вейерштрассу, положив

$$\xi^2 = \varepsilon = \pm 1. \quad (8)$$

Таким образом, таблица скалярных произведений будет иметь вид

	x	y_i	X	ξ
x	0	0	1	0
y_i	0	g_{jj}	0	0
X	1	0	0	0
ξ	0	0	0	1

(9)

деривационные уравнения запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} y_i &= \nabla_i^1 x, & (A) \\ \nabla_j^1 y_i &= p_{ji}x - g_{ji}X + b_{ji}\xi, & (B) \\ \partial_j \xi &= -b_{j.a}^k y_k + \Gamma_j x, & (C) \\ \nabla_{j.1} X &= -p_{j.k}^k y_k, & (C^*) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

условия же их интегрируемости таковы:

$$\left. \begin{aligned} b_{[ij]} &= 0, & (I) \\ p_{ji} + \nabla_{[j} l_{i]} &= 0; & (II) \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{kji}^m &= 2p_{[kj]}\delta_i^m - 2\delta_{[k}^m p_{j]i} + \\ &+ b_{[k}^m b_{j]i} - 2g_{i[j} p_{k]}^m, & (I) \\ \nabla_{[k}^1 b_{j]i} + \varepsilon g_{i[k} \Gamma_{j]} &= 0, & (II) \\ \nabla_{[k} p_{j]i} + b_{i[j} \Gamma_{k]} &= 0; & (II^*) \\ \nabla_{[j.1} \Gamma_{i]} &= b_{.[j}^k b_{i]k}. & (C) \end{aligned} \right\} \quad (B) \quad (11)$$

§ 80. Нормализованная гиперповерхность второго порядка

Рассмотрим теперь тот случай, когда X_m совпадает с самим абсолютom Q_n в P_{n+1} , — случай гиперповерхности второго порядка, *нормализованной автополярно*, т. е. полярно относительно того поляритета, который она определяет.

Не делая сначала никаких предположений относительно ранга этого поляритета, мы будем иметь, специализируя формулы § 79, следующую таблицу скалярных произведений:

	x	y_i	X
x	0	0	1
y_j	0	g_{ij}	0
X	1	0	0

(1)

основных уравнений

$$\left. \begin{aligned} y_i &= \nabla_i^1 x, & (A) \\ \nabla_j^1 y_i &= p_{ji}x - g_{ij}X, & (B) \\ \nabla_j^1 X &= C_{.i}^k y_k & (C) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и условий интегрируемости

$$\left. \begin{aligned} p_{[ji]} + \nabla_{[j} l_{i]} &= 0; & (A) \\ R_{kji}^m &= 2p_{[kj]}\delta_i^m - 2\delta_{[k}^m p_{j]i} + 2g_{i[j}C_{.k]}^m, & (I) \\ \nabla_{[k} p_{j]i} &= 0; & (II) \\ \nabla_{[j}^1 C_{i]}^k &= 0 & (C) \end{aligned} \right\} \quad (B) \quad (3)$$

с дополнительным условием

$$p_{ji} = -C_{.j}^k g_{ki}. \quad (4)$$

В случае полного ранга поляритета ранг g_{ij} тоже полный и

$$C_{.j}^k = -p_{j.}^k. \quad (5)$$

Основные уравнения и условия их интегрируемости становятся в этом случае частным видом (79,6) и (79,7), так что уравнение (2C) переписывается следующим образом:

$$\partial_i X = -p_i^k y_k, \quad (6)$$

а условия интегрируемости сводятся к следующим:

$$\left. \begin{aligned} R_{kji}^m &= 2p_{[kj]}\delta_i^m - 2\delta_{[k}^m p_{j]i} - 2g_{i[j}p_{k]}^m, \\ \nabla_{[k} p_{j]i} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Таким образом, гиперповерхность второго порядка полного ранга, нормализованная автополярно, определяется заданием основного и дополнительного тензоров g_{ij} и $2l_i$ своей внутренней вейлевой геометрии и тензора p_{ij} , удовлетворяющего условиям (3VI) и (3VII).

Сравнивая условия (7) с (45,2) и (45,5), мы видим, что они совпадают, и, следовательно, для того чтобы геометрия Вейля могла быть реализована как внутренняя

геометрия гиперповерхности второго порядка, нормализованной автополярно, необходимо и достаточно, чтобы она была конформно-евклидовой.

К этому же результату мы можем прийти и другим путем. При переходе от одной автополярной нормализации к другой такой же нормализации внутренняя геометрия испытывает конформное преобразование, так как основной тензор g_{ij} выражает проективную метрику этой гиперповерхности и не зависит от нормализации. Но всякую гиперповерхность можно нормализовать пучком нормалей первого рода с центром в точке X_0 этой гиперповерхности. В этом случае нормали второго рода расположатся в гиперплоскости, касающейся Q_n в точке X_0 , и, согласно теореме, приведенной в конце § 62, внутренняя геометрия будет евклидовой. Необходимость утверждения теоремы доказана.

Чтобы доказать достаточность, примем во внимание, что тензор $t_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - G_{ij}^k$ является инвариантом любого симметричного преобразования пары сопряженных связностей (§ 52). Следовательно, при таком преобразовании самосопряженная пара, характеризуемая равенством $t_{ij}^k = 0$, остается самосопряженной.

Нормализуя Q_n автополярно пучком с центром на ней, мы получим, как уже видели, евклидову самосопряженную пару. При любом симметричном преобразовании нормализатор, который является также дополнительным вектором Вейля, испытывает преобразование вида (44,2), т. е.

$$\check{l}_i = l_i - p_i. \quad (8)$$

Так как p_i произволен, то этим путем на Q_n можно осуществить любую конформно-евклидову геометрию.

Имея в виду приведенные рассуждения, можно сказать, что, специализируя условия интегрируемости нормализованной поверхности, мы пришли и к новому доказательству условий (45,2) и (45,5), характеризующих конформно-евклидову геометрию Вейля.

В общем случае X_m , нормализованной внутренней полярной нормализацией, нормализация подчинена автополярной нормализации Q_n . Если мы привели последнюю к такому виду, что внутренняя геометрия Q_n стала евклидовой, то внутренняя геометрия X_m станет римановой,

причем, так как тензор g_{ij} не зависит от нормализации, эта риманова геометрия будет конформна первоначальной вейлевой внутренней геометрии X_m . Но, по теореме Шлефли, всякая риманова геометрия осуществима на X_m в некотором E_n и, с другой стороны, изменением нормализации можно достигнуть любого преобразования дополнительного тензора внутренней геометрии Вейля; следовательно, *любая геометрия Вейля может быть реализована на некоторой поверхности, принадлежащей гиперповерхности второго порядка достаточно высокого числа измерений, находящейся в автополярной нормализации.*

Условия (3) являются достаточными для того, чтобы метрическая геометрия с основным тензором любого ранга могла быть осуществлена на Q_n соответственного ранга. Но, рассуждая, как и выше, мы можем убедиться, что при некотором преобразовании нормализации, сопровождающемся изменением дополнительного тензора l_i по формулам (8), внутреннюю связность X_m можно сделать евклидовой. Естественно назвать такую метрическую геометрию тоже *конформно-евклидовой*.

После] перехода к евклидовой связности, декартовыми координатам и каноническому нормированию коэффициенты основной квадратичной формы станут постоянными. Таким образом, *условия (3) достаточны для того, чтобы метрическая геометрия была конформно-евклидовой.*

В заключение рассмотрим совершенно произвольную нормализацию гиперповерхности второго порядка и полного ранга. Так как такую нормализацию можно заменить автополярной, а для последней характерна самосопряженность внутренних связностей, то пара внутренних связностей, соответствующих первоначальной нормализации, допускает составное преобразование, переводящее ее в самосопряженную. Но, согласно пункту 6 § 53, такая пара является геодезической, и, таким образом, *гиперповерхность второго порядка и полного ранга характеризуется в любой нормализации условием*

$$B^i_{.jk} = 0,$$

т. е. равенством нулю тензора, определенного соотношением (52,8) для пары ее внутренних связностей.

§ 81. Обратные нормализации гиперповерхности второго порядка

Если соответствие между точками x гиперповерхности второго порядка Q_n , нормализованной автополярно, и вершинами нормали X взаимно однозначно, т. е. если точка X описывает вместе с соответствующей ей точкой x область n измерений, то обе области (x) и (X) можно рассматривать как пару гиперповерхностей. Действительно, нормаль второго рода является полярной нормали первого рода Q_n и, следовательно, лежит на пересечении гиперплоскостей, касающихся Q_n в этих точках. Тогда X можно считать точкой нормализуемого многообразия, а x — вершиной нормали первого рода, сопоставляя таким образом исходной нормализации, которую мы будем обозначать символом $(x \rightarrow X)$, нормализацию, обратную данной, т. е. $(X \rightarrow x)$.

Сделаем несколько замечаний о связи внутренних геометрий, определяемых на Q_n двумя нормализациями, обратными друг другу.

Прежде всего, по свойству общей нормализации пары гиперповерхностей (§ 70), а также потому, что автополярным нормализациям соответствуют самосопряженные внутренние геометрии, мы будем иметь для нормализаторов обеих нормализаций формулу (70,4):

$$\Lambda_i + l_i = 0. \quad (1)$$

Таким образом, система основных уравнений для нормализации $(X \rightarrow x)$ будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} Y_i &= \partial_i X + l_i X, & (A') \\ \nabla_{j\ 1} Y_{(i)} &= \nabla_j Y_i - l_j Y_i = P_{ji} X - G_{ji} x, & (B') \\ \nabla_j^1 x &= -P_{j\cdot}^k Y_k. & (C') \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Но уравнения (80,2C) дают

$$y_j Y_i = C_{\cdot i}^k g_{kj},$$

или, вследствие (80,4),

$$y_i Y_j = -P_{ji}, \quad (3)$$

откуда

$$P_{ji} = p_{ij}. \quad (4)$$

Применяя смешанное дифференцирование, мы получим

$$\nabla_k p_{j(i)} = 0. \quad (5)$$

Таким образом, *внутренние связности, соответствующие двум обратным нормализациям Q_n , находятся в обобщенной сопряженности относительно тензора p_{ij} .*

Для того чтобы многообразие нормалей первого рода было сопряжено Q_n в области (x) , необходимо и достаточно, чтобы тензор p_{ij} был симметричен. Но это уже показывает, что та же конгруэнция сопряжена Q_n и в области (X) . Обе внутренние геометрии становятся в этом случае римановыми и сопряженными между собою относительно тензора p_{ij} . Канонические нормирования этих областей имеют место одновременно, так как равенства $l_i = 0$ и $\Lambda_i = 0$ равносильны и при условии

$$xX = 1,$$

где x (или X) нормирован канонически.

Рассматривая $N(Q_n)$ снова как общую нормализацию двух гиперповерхностей, примем во внимание, что риманова средняя метрика характеризует расслояемость в направлении нормалей первого рода. Но вследствие самосопряженности каждой пары внутренних геометрий Q_n средняя метрика совпадает с метрикой первого и второго родов.

Итак, *для того чтобы на Q_n определялась внутренняя риманова геометрия, необходимо и достаточно, чтобы нормализующие многообразия были расслоены в направлении нормалей первого рода.*

Посмотрим на последние результаты с точки зрения геометрии пространства K_{n+1} с абсолютом Q^n .

Всякое многообразие прямых X_n^1 , или *прямолинейная конгруэнция*, заданная в этом пространстве, определяет вместе с плоскостями P_{n-1} , полярными этим прямым, автополярную нормализацию абсолюта. Задав некоторую ориентацию на лучах конгруэнции, будем считать точкой, соответствующей этой ориентации, точку X и определим внутреннюю конформно-евклидову связность нормализации $x \rightarrow X$. Обратно, если задана такая связность, то нормализация абсолюта определяется при $n > 1$ с точностью до проективного преобразования, переводящего абсолют в себя. Таким образом, *при $n > 1$ существует взаимно*

однозначное соответствие между конформно-евклидовыми связностями Вейля n измерений и ориентированными конгруэнциями пространства K_{n+1} ; две конгруэнции, отличающиеся только ориентацией лучей, соответствуют двум конформно-евклидовым связностям, находящимся в обобщенной сопряженности относительно тензора p_{ij} формул (2), характеризующих эти связности.

Если связность риманова, то соответствующая конгруэнция допускает существование ∞^1 гиперповерхностей, которые она нормализует полярно, а следовательно, конформно-евклидовы римановы связности соответствуют нормальным конгруэнциям K_{n+1} .

§ 82. Кривые и поверхности конформного пространства

Возможность отображения конформного пространства M_n на гиперповерхность второго порядка Q_n позволяет применить результаты изложенной теории к поверхностям этого пространства. Однако раньше, чем перейти к этому применению, мы рассмотрим некоторые понятия дифференциальной геометрии пространства M_n .

Кривая линия M_n определяется как последовательность точек, заданных уравнением

$$x = x(t), \quad (1)$$

где x — дифференцируемая функция, а $x^2 = 0$ при любых значениях t . Сфера *) ξ называется касательной к этой линии в ее точке x , если она проходит через эту точку и бесконечно близкую ей точку $x + dx$, т. е. удовлетворяет условиям

$$\xi x = 0, \quad \xi dx = 0. \quad (2)$$

Касательная гиперсфера не определяется однозначно, а удовлетворяет только двум условиям, вследствие чего все гиперсферы, касающиеся кривой в данной ее точке, образуют параболическую связку $n - 1$ измерения.

В зависимости от того, какое количество бесконечно близких точек кривой принадлежит касательным сферам, среди них можно выделить такие, которые находятся с кри-

*) В дальнейшем там, где это не может вызвать недоразумений, мы говорим «сфера» вместо «гиперсфера».

вой в соприкосновении более высоких порядков. Гиперсфера называется просто *соприкасающейся*, если число этих точек равно трем, т. е. она удовлетворяет условиям

$$\xi x = \xi dx = \xi d^2x = 0. \quad (3)$$

Соприкасающиеся сферы образуют связку $n - 2$ измерений, т. е. все проходят через круг, содержащий точку x и ортогональный сферам dx и d^2x . Этот круг называется *соприкасающимся кругом* кривой или *кругом кривизны*.

Будем называть *сферическим элементом* совокупность точки x и сферы η , содержащей эту точку, и рассматривать последовательность сферических элементов, определяемую дифференцируемыми уравнениями

$$x = x(t), \quad \eta = \eta(t) \quad (4)$$

при условиях

$$x^2 = 0, \quad x\eta = 0, \quad \eta^2 \neq 0. \quad (5)$$

Направляющим кругом последовательности сферических элементов называется такой круг, который проходит через точку x ортогонально соответствующей сфере последовательности и другой ее сфере, бесконечно близкой к первой.

Сфера η называется *нормальной кривой* в данной ее точке x , если она проходит через эту точку и ортогональна всем сферам, касающимся кривой в этой точке. Согласно этому определению *нормальные сферы образуют в данной точке параболическую связку, сопряженную связке Σ_{n-1} касательных сфер*, и общий вид вектора нормальных сфер представляется так:

$$\eta = dx + \lambda x; \quad (6)$$

здесь x — вектор точки кривой, а λ — произвольный численный множитель. Действительно, $\eta x = 0$, и если ξ — вектор любой касательной сферы, то

$$\eta \xi = \xi dx + \lambda \xi x = 0.$$

Последовательность сферических элементов, состоящую из нормальных сфер, назовем *нормальной*. Направляющий круг такой последовательности должен проходить через точку x и быть ортогональным сфере $dx + \lambda x$ и сфере $d^2x + d\lambda dx + \lambda d^2x$, а следовательно, он же проходит через точки dx и d^2x .

Таким образом, направляющий круг нормальной последовательности сферических элементов совпадает с соприкасающимся кругом кривой, описанной точкой этого элемента.

Поверхность X_m пространства M_n задается уравнением

$$x = x(u^1, \dots, u^m) \quad (x^2 = 0). \quad (7)$$

Сфера S_{n-1} касается поверхности X_m в ее точке x , если она касается в этой точке всякой кривой, проходящей через нее на X_m . Касательная сфера по-прежнему должна удовлетворять условиям $x\xi = 0$, $dx\xi = 0$; однако последнее условие должно выполняться для любого направления смещения точки по X_m и, следовательно, тождественно относительно выбора du^i . Таким образом, касательная сфера X_m удовлетворяет $m + 1$ условию

$$x\xi = 0, \quad \partial_i x \xi = 0. \quad (8)$$

Точка x называется *неособенной*, если все предыдущие условия независимы между собою. В неособенной точке x касательные сферы образуют связку $n - m$ измерений. В дальнейшем мы без всяких оговорок будем предполагать, что рассматриваем только неособенные точки X_m .

Угол между направлениями двух линий на поверхности определяется формулой

$$\cos \theta = \frac{g_{ij} d_1 u^i d_2 u^j}{\sqrt{g_{pq} d_1 u^p d_1 u^q} \sqrt{g_{rs} d_2 u^r d_2 u^s}}, \quad (9)$$

где

$$g_{ij} = \partial_i x \partial_j x \quad (10)$$

есть *основной метрический тензор поверхности*, который задается с точностью до скалярного множителя, остающегося неопределенным до тех пор, пока не выбрано нормирование вектора x .

§ 83. Нормализованная поверхность конформного пространства

Мы будем называть поверхность X_m пространства M_n *нормализованной* и обозначать $M(X_m)$, если через каждую ее точку проходит определенная нормализующая сфера S_{n-m} , ортогональная всем касательным сферам данной поверхности.

Нормализующая сфера, или S_N , вполне определяется заданием m независимых опорных координатных сфер

$$y_i = \partial_i x - l_i x, \tag{1}$$

где l_i подобраны так, чтобы всякая сфера y_i содержала S_N .

С каждой точкой $M (X_m)$ можно связать конформный репер, задав, кроме точки поверхности x и опорных координатных сфер y_i , вторую точку X , лежащую на S_N , или вершину нормали, и $n - m$ сфер X_a , касательных к X_m в точке x . Векторы всех сфер (и точек), образующих репер, при условии надлежащего нормирования X и X_a , $a = \overline{1, n - m}$, определяют следующую таблицу скалярных произведений, совпадающую с таблицей (79,5):

	x	X	X_a	y_i
x	0	1	0	0
X	1	0	0	0
X_b	0	0	G_{ab}	0
y_j	0	0	0	g_{ij}

(2)

где

$$g_{ij} = y_i y_j \tag{3}$$

есть тензор, определяющий угловую метрику на X_m , а G_{ab} можно считать постоянными или даже, выбирая все касательные сферы X_a взаимно ортогональными и нормируя их векторы, считать матрицу G_{ab} единичной.

Формальное совпадение приведенной таблицы с таблицей (79,5) объясняется тем, что возможность отображения пространства M_n на квадртку Q_n проективного пространства P_{n+1} позволяет установить полный изоморфизм теории нормализованных поверхностей конформного пространства и теории внутренних полярных нормализаций в том частном случае, когда уравнение абсолюта может быть приведено к виду

$$\sum_1^n (x^\alpha)^2 - (x^{n+1})^2 = 0. \tag{4}$$

Действительно, при указанном отображении X_m пространства M_n переходит в $\bar{X}_m$, расположенную на Q_n ; сферы X_a , касающиеся X_m в точке x , соответствуют точкам $\bar{X}_a$, расположенным вне Q_n и полярно сопряженным точке $\bar{x}$, соответствующей x на Q_n . Нормализующей сфере S_{n-m} отвечает сечение Q_n некоторой плоскостью $n - m + 1$ измерения, содержащей точки $\bar{x}$, $\bar{X}$ и полярной точкам $\bar{X}_a$. Эту плоскость можно принять за нормаль первого рода поверхности $\bar{X}_m$, и эта нормаль вместе с полярной ей плоскостью P_m определит внутреннюю полярную нормализацию X_m . Называя эту $N(\bar{X}_m)$ проективным образом $M(X_m)$, мы можем перенести всю теорию первой на последнюю, изменив только соответствующим образом терминологию. В частности, будем называть *внутренней геометрией* $M(X_m)$ внутреннюю геометрию той $N(\bar{X}_m)$, которая является ее проективным образом. Употребляя ковариантное дифференцирование, соответствующее этой геометрии, мы придем для $M(X_m)$ к системе дифференциальных уравнений, совпадающих с уравнениями (79,10).

Условия интегрируемости этой системы будут иметь вид (79,11), а метрический тензор будет удовлетворять условию

$$\nabla_k^2 g_{ij} = 0,$$

которое показывает, что *внутренняя геометрия X_m есть геометрия Вейля **), основной тензор которой совпадает с тензором угловой метрики g_{ij} , а дополнительный тензор есть нормализатор, определяющий опорные сферы данной $M(X_m)$.

Для характеристики внутренней связности $M(X_m)$ можно также привести чисто конформное истолкование параллельного переноса, определяющего эту связность.

Будем называть *опорной сферой* v направления v^i , принадлежащего $M(X_m)$, такую сферу S_{n-1} , которая ортогональна этому направлению и содержит нормализующую S_{n-m} . В силу последнего условия эта сфера должна представлять линейную комбинацию опорных

*) Так как сигнатура Q_n определяется формулой (4), то тензор g_{ij} имеет полный ранг для всех действительных поверхностей пространства M_n

координатных сфер, так что

$$v = \lambda^k y_k.$$

С другой стороны, любые сферы ξ , касающиеся направления v^i , т. е. удовлетворяющие условиям $\xi x = 0$ и $\xi y_i v^i = 0$, должны также удовлетворять условию

$$\xi v = \xi \lambda^k y_k = 0,$$

откуда следует, что $\lambda^k = \lambda v^k$, и можно положить

$$v = v^k y_k.$$

Сравнивая с (57,7), мы видим, что опорные сферы $M (X_m)$ соответствуют нормальным точкам $N (\bar{X}_m)$.

Но для того, чтобы направление v^i переносилось параллельно на $\bar{X}_m$, необходимо и достаточно, чтобы плоскость смещения этого направления, т. е. плоскость, проходящая через точки $\bar{x}$, $\bar{v}$ и $\bar{v} + d\bar{v}$, пересекала нормаль первого рода. Плоскости же смещения или, вернее, той Q_1 , по которой она пересекает Q_n , отвечает на $M (X_m)$ направляющий круг последовательности сферических элементов x , v , и требование пересечения плоскости смещения и нормали первого рода равносильно тому, чтобы направляющий круг пересекал S_N во второй точке, отличной от x .

Итак, для того чтобы направление v^i переносилось параллельно во внутренней связности X_m , необходимо и достаточно, чтобы направляющий круг последовательности опорных сферических элементов этого направления пересекал нормаль поверхности во второй точке, отличной от точки нормализованной поверхности *).

Направляющий круг последовательности направлений, касающихся некоторой кривой на X_m , есть круг кривизны этой кривой, так как опорная сфера нормальна этой кривой. Отсюда следует, что геодезическая линия внутренней связности X_m характеризуется тем, что ее соприкасающийся круг пересекает нормализованную сферу во второй точке, отличной от точки поверхности.

*) Чтобы этот результат имел полную общность, надо иметь в виду предельный случай, когда направляющий круг касается нормали первого рода. В этом случае мы тоже будем считать, что имеется вторая точка пересечения.

§ 84. Нормализованное конформное пространство

Результаты предыдущего параграфа сохраняют свою силу и для нормализованного конформного пространства, или $N(M_n)$. Его проективным образом является гиперквадрика Q_n , нормализованная автополярно. Эта нормализация сводится к заданию дифференцируемого точечного соответствия $x \rightarrow X$. Точка x называется *нормализуемой*, а точка X — *нормализующей точкой* $N(M_n)$. Всякому направлению, исходящему из точки x , соответствует опорная сфера, которая ортогональна этому направлению и проходит через точки x и X . Внутренняя связность $N(M_n)$ характеризуется тем, что для последовательности сферических элементов, состоящих из опорных сфер направления, переносащегося параллельно, и точек его приложения, направляющий круг проходит через соответствующую нормализующую точку.

Для того чтобы линия была геодезической по отношению к внутренней связности, необходимо и достаточно, чтобы круг ее кривизны проходил через соответствующую нормализующую точку.

Внутренняя связность $N(M_n)$ есть связность Вейля, причем основной тензор этой связности

$$g_{ij} = y_i y_j$$

определяет угловую метрику M_n , а дополнительный вектор l_i равен удвоенному нормализатору. Опорные сферы y_i , проходя через нормализуемую точку x , пересекаются также в соответствующей нормализующей точке X . Основные уравнения и условия интегрируемости $N(M_n)$ совпадают с (80,2), (80,3) и (80,4), т. е. с основными уравнениями его проективного образа и их условиями интегрируемости. Вследствие этого внутренняя связность нормализованного пространства Мёбиуса есть конформно-евклидова связность Вейля с положительно определенной основной квадратичной формой.

Обратно, всякая связность указанного вида может рассматриваться как внутренняя связность некоторого $N(M_n)$. Соответствующая нормализация определяется с точностью до преобразования группы Мёбиуса при $n > 2$.

Всякому направлению v^k , наряду с *опорной сферой первого рода*

$$v = v^i y_i, \quad (1)$$

можно отнести также *опорную сферу второго рода*

$$V = V^k Y_k, \quad (2)$$

которая ортогональна смещению нормализующей точки, соответствующему смещению нормализуемой точки в направлении вектора v^k . Ортогональность опорных сфер первого и второго рода двух различных направлений v^i и w^j выражается, вследствие (81,3), условием

$$p_{ij} v^i w^j = 0, \quad (3)$$

которое устанавливает некоторую корреляцию в пространстве направлений, исходящих из точки x . Если эта корреляция оказывается поляритетом, т. е. если тензор p_{ij} симметричен, то мы будем называть соответствие $x \rightarrow X$ *инволюционным*. Как это следует из результатов § 81, *внутренняя геометрия $N(M_n)$ в случае инволюционного соответствия будет римановой*, и существует каноническое нормирование точки x , соответствующее обращению в нуль нормализатора l_i .

Рассмотрим частный случай $N(M_n)$, предположив, что соответствие $x \rightarrow X$ есть инверсия относительно сферы $n - 1$ измерения A , которую будем называть *абсолютной сферой инверсии*.

Проективный образ этой нормализации есть нормализация Q_n связкой нормалей первого рода, выходящих из точки $\bar{A}$, изображающей сферу A , и полем нормалей второго рода, расположенных в гиперплоскости, полярной точке $\bar{A}$. По общему свойству нормализующей связки (§ 64) *внутренняя геометрия будет эквипроективной*, а так как эта же нормализация является также и автополярной, то *внутренняя геометрия должна быть римановой геометрией постоянной кривизны*.

В § 64 мы видели также, что геодезические линии внутренней связности при нормализации связкой совпадают с сечениями поверхности, плоскости которых проходят через центр нормализации. Отсюда видно, что геодезические линии и угловая метрика рассматриваемой внутрен-

ней связности совпадают с прямыми линиями и угловой метрикой пространства S_n подгруппы конформных преобразований, переводящих в себя сферу A (§ 29).

Таким образом, внутренняя геометрия $N(M_n)$ при соответствии $x \rightarrow X$, определяемом инверсией относительно гиперсферы A , есть риманова геометрия постоянной кривизны, которая будет гиперболической, эллиптической или параболической в зависимости от того, будет ли сфера A действительной, мнимой или вырождающейся в точку.

Интерпретация геометрии Лобачевского (или гиперболической геометрии), основанная на рассмотрении инверсии относительно действительной сферы (или круга — при $n=2$), была впервые рассмотрена Пуанкаре и носит его имя.

Сечения Q_n плоскостями P_{m+1} будут проективными образами сфер S_m пространства M_n . Рассмотрим нормализацию этих сфер, подчиненную нормализации M_n , полученной с помощью инверсии. Так как нормализация Q_n автополярна, то все нормали первого рода сечения $\bar{S}_m$ проходят через P_{n-m-2} , полярную P_{m+1} . С другой стороны, они же должны проходить через центр нормализации — точку $\bar{A}$ и, следовательно, все содержат P_{n-m} , определяемую P_{n-m-2} и этой точкой. Но это P_{n-m} пересекает P_m в точке $\bar{A}_0$, принадлежащей всем прямым, по которым нормали первого рода пересекают P_{m+1} , содержащее $\bar{S}_m$. Так как внутренняя геометрия X_m , расположенной в некоторой плоскости P_{m+1} , зависит только от пересечения нормалей первого рода с P_{m+1} , а $\bar{S}_m$ в P_{n+1} нормализована связкой, то ее внутренняя геометрия будет римановой постоянной кривизны.

Отсюда можно сделать следующий вывод: *сферы и плоскости пространства постоянной кривизны обладают внутренней геометрией постоянной кривизны.*

§ 85. Нормализация семейством сфер

Естественным обобщением геометрии пространства постоянной кривизны, которая связана с соответствием инверсии относительно абсолютной сферы A , является внутренняя геометрия инверсии относительно семейства абсолютных сфер.

Предположим, что в пространстве M_n дано семейство гиперсфер

$$A = A(p^\alpha), \quad \alpha = \overline{1, n-k}, \quad (1)$$

и каждой точке x этого пространства отнесена точка X , сопряженная с x в инверсии относительно одной из этих сфер.

При этом мы будем иметь, согласно (28,6),

$$X = fx + A, \quad (2)$$

где x нормирован так, что

$$Ax = 1, \quad (3)$$

а

$$f = -\frac{A^2}{2}. \quad (4)$$

Предположив, что соответствие $x \rightarrow X$ однозначно и дифференцируемо, мы должны будем считать, что рассматриваемая область точек x заполнена $(n-k)$ -параметрическим семейством k -мерных поверхностей A_k , обладающих тем свойством, что любая точка x такой поверхности переходит в соответствующую нормализующую точку X при инверсии относительно неподвижного абсолюта; мы будем называть эти поверхности *эквиабсолютными*.

Очевидно, что нормализация всякой A_k , подчиненная нормализации $N(M_n)$, построена так, как если бы это была поверхность в пространстве с неизменным абсолютном, т. е. поверхность в римановом пространстве постоянной кривизны. Отсюда следует, что *внутренняя геометрия всякой эквиабсолютной поверхности будет римановой, хотя геометрия нормализованного пространства, вообще говоря, вейлева*.

Будем теперь искать условия, при которых соответствие, устанавливаемое семейством сфер, будет инволюционным.

Пользуясь таблицей (79,5) и предполагая, что латинские индексы пробегают значения от 1 до n , определяя номера криволинейных координат пространства, мы будем иметь

$$y_i X = \partial_i x X - l_i = 0,$$

или

$$l_i = \partial_i x X = \partial_i X (fx + A) = \partial_i x A,$$

или, вследствие (3),

$$l_i = -\partial_i A x.$$

Инволюционное соответствие характеризуется градиентным нормализатором, вследствие чего

$$l_i = \frac{\partial l}{\partial u^i} = -x \partial_\alpha A p_i^\alpha = l_\alpha \frac{\partial p^\alpha}{\partial u^i},$$

где $p_i^\alpha = \partial_i p^\alpha$, откуда видно, что l есть функция только параметров p^α , т. е. сохраняет свое значение на каждой из эквиабсолютных поверхностей.

Пользуясь этим, изменим нормирование, положив

$$A = e^{-l} \check{A}, \quad x = e^l \check{x},$$

и получим

$$l_i = -e^{-l} \partial_i \check{A} x + l_i e^{-l} \check{A} x = -\partial_i \check{A} \check{x} + l_i.$$

Таким образом, при новом нормировании $\check{l}_i = -\partial_i \check{A} \check{x} = 0$, так что оно является каноническим. В дальнейшем, опуская значки $\check{}$, мы всегда будем предполагать, что это нормирование имеет место. Так как при этом

$$\partial_\alpha A x p_i^\alpha = 0$$

и ранг матрицы $\| p_i^\alpha \|$ равен $n - k$, если все параметры существенны, то

$$\partial_\alpha A x = 0. \quad (5)$$

Но $\partial_\alpha A$ есть сфера, а предыдущее равенство показывает, что точка x принадлежит $n - k$ независимым сферам, пока она находится на данной эквиабсолютной поверхности. Иными словами, при инволюционном соответствии все эквиабсолютные поверхности будут сферами k измерений.

Внутренняя геометрия этих сфер, по предыдущему, определяется так, как если бы они были сферами пространства постоянной кривизны, и, следовательно, будет римановой геометрией постоянной кривизны.

§ 86. Внутренняя связность пространства, нормализованного связкой сфер

Обратимся теперь к рассмотрению того частного случая инволюционного соответствия, которое определено $(n - k)$ -мерной связкой абсолютных сфер.

Для того чтобы семейство (85,1) было связкой, необходимо и достаточно, чтобы точки проективного образа этих сфер принадлежали плоскости P_{n-k+1} , т. е. удовлетворяли дифференциальным уравнениям (62,1В):

$$\partial_{\alpha\beta}^2 A = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \partial_{\gamma} A + \pi_{\alpha\beta} A, \quad (1)$$

которые определяют некоторое гармоническое соответствие в этой плоскости.

Нормали второго рода будут плоскостями $n - k$ измерений, которые определяются точками $\partial_{\alpha} A$ и, следовательно, находятся в однозначном соответствии с эквиабсолютными сферами. В дальнейшем мы должны исключить тот случай, когда многообразие этих сфер зависит от числа параметров $s < n - k$, так как тогда эквиабсолютные поверхности не заполняют n -мерной области. Таким образом, согласно § 62, будем требовать, чтобы ранг тензора $\pi_{\alpha\beta}$ был равен $n - k$.

Используем теперь основные уравнения рассматриваемого $N(M_n)$, записав их предварительно вместе с условиями интегрируемости:

$$\left. \begin{aligned} \partial_i x &= y_i, & (A) \\ \nabla_j y_i &= p_{ji} x - g_{ij} X, & (B) \\ \partial_i X &= p_{i.}^k y_k, & (C) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{[ij]} &= 0, & (A) \\ \nabla_{[k} p_{j]i} &= 0, & (B) \\ R_{kji}^m &= 2\delta_{[k}^m p_{j]i} - 2g_{i[j} p_{k]}^m, & (C) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

причем в силу того, что соответствие $x \rightarrow X$ инволюционно, внутренняя геометрия — риманова и ее основной тензор удовлетворяет условию

$$\nabla_k g_{ij} = 0. \quad (4)$$

Найдем выражение тензора p_{ij} :

$$\begin{aligned} p_{ij} &= -\partial_i x \partial_j X = -\partial_i x (\partial_j f x + f \partial_j x + \partial_j A) = \\ &= -f g_{ij} + \partial_i x \partial_j A, \end{aligned}$$

но так как

$$\partial_i A x = 0,$$

то

$$-\partial_{ij}^2 A x = \partial_i A \partial_j x = p_i^\alpha p_j^\beta \partial_{\alpha\beta}^2 A x = p_i^\alpha p_j^\beta \pi_{\alpha\beta},$$

и окончательно

$$p_{ij} = -(f g_{ij} + p_i^\alpha p_j^\beta \pi_{\alpha\beta}). \quad (5)$$

Подставляя это выражение в условие (3В), мы придадим ему вид

$$g_{i[j} \partial_{k]} f + p_i^\alpha p_{[j}^\beta \partial_{k]} \pi_{\alpha\beta} + \pi_{\alpha\beta} p_{[j}^\beta \nabla_{k]} p_i^\alpha = 0 \quad (6)$$

причем знак ковариантного дифференцирования относится только к латинским индексам.

В дальнейшем нам будет удобно воспользоваться специальной системой координат. Для этого рассмотрим связку, сопряженную связке абсолютных сфер. Эта связка имеет $n - k$ измерений, и через каждую точку пространства проходит, вообще говоря, одна сфера $n - k$ измерений, по которой пересекаются сферы связки. Эта сфера S_{n-k} будет вполне ортогональна всем пересекающим ее эквиабсолютным сферам.

Установим произвольную координацию на какой-либо эквиабсолютной сфере, припишем каждой сфере сопряженной связки координаты той точки, в которой эти сферы пересекаются между собою, и будем определять положение всякой точки пространства 1) $n - k$ параметрами u^α ($\alpha, \beta, \gamma, \delta = \overline{1, n - k}$), определяющими эквиабсолютную сферу, проходящую через эту точку, 2) k параметрами u^π ($\pi, \rho, \sigma, \tau, \omega = \overline{n - k + 1, n}$), определяющими сферу сопряженной связки, проходящую через ту же точку. При этом мы ограничимся рассмотрением той области пространства, в которой положение точки определяется однозначно.

Ввиду полной ортогональности многообразий $u^\alpha = \text{const}$ и $u^\pi = \text{const}$ для метрического тензора будем

иметь

$$g_{\alpha\pi} = 0.$$

Так как можно положить $u^\alpha = p^\alpha$, то

$$p_i^\alpha = \delta_i^\alpha$$

и, следовательно,

$$p_{\alpha\beta} = -fg_{\alpha\beta} - \pi_{\alpha\beta}, \quad p_{\alpha\sigma} = 0, \quad p_{\sigma\rho} = -fg_{\sigma\rho},$$

а условие (6) принимает вид

$$g_{i[j}\delta_{k]}^\alpha \partial_\alpha f + \delta_i^\alpha \delta_{[j}^\beta \partial_{k]} \pi_{\alpha\beta} - \pi_{\alpha\beta} G_{i[k}^\alpha \delta_{j]}^\beta = 0,$$

где G_{ik}^α — коэффициенты связности в пространстве, ибо

$$\nabla_k p_i^\alpha = -G_{ki}^\alpha \delta_l^\alpha = -G_{ki}^\alpha.$$

В частности, так как f и $\pi_{\alpha\beta}$ не зависят от u^σ , при $k = \sigma$

$$g_{i\sigma} \delta_j^\alpha \partial_\alpha f + \pi_{\alpha\beta} G_{i\sigma}^\alpha \delta_j^\beta = 0,$$

а если, кроме того, $j = \gamma$, то

$$g_{i\sigma} \partial_\gamma f + \pi_{\alpha\gamma} G_{i\sigma}^\alpha = 0.$$

Вследствие полноты ранга $\pi_{\alpha\gamma}$ эти уравнения могут быть разрешены относительно коэффициентов связности, так что

$$G_{i\sigma}^\alpha = \varphi^\alpha g_{i\sigma}, \tag{a}$$

где

$$\varphi^\alpha \pi_{\alpha\beta} = -\partial_\beta f. \tag{b}$$

Но коэффициенты связности суть скобки Кристоффеля тензора g_{ij} , вследствие чего

$$G_{i\sigma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\sigma g_{i\beta} - \partial_\beta g_{i\sigma})$$

и при сравнении с (a) мы получим

$$\partial_\alpha g_{i\beta} - \partial_\beta g_{i\alpha} = 2\varphi_\beta g_{i\alpha}^*),$$

откуда при $i = \alpha$

$$\partial_\sigma g_{\alpha\beta} = 0,$$

и, значит, $g_{\alpha\beta}$ зависят только от параметров u^γ .

*) Индексы перебрасываются с помощью g_{ij} .

С другой стороны,

$$\partial_\beta g_{\rho\sigma} = -2\varphi_\beta g_{\rho\sigma}.$$

Тензор φ_β зависит только от u^δ , поэтому после вторичного дифференцирования мы получим

$$\partial_{[\gamma}\varphi_{\beta]} = 0,$$

и, следовательно, φ_β есть градиент, т. е.

$$\varphi_\beta = \partial_\beta \varphi(u^\delta),$$

а величины

$$\gamma_{\sigma\rho} = e^{2\varphi} g_{\sigma\rho}$$

зависят только от u^δ .

Но квадратичная форма

$$g_{\sigma\rho} du^\sigma du^\rho = e^{2\varphi} \gamma_{\sigma\rho} du^\sigma du^\rho$$

есть линейный элемент эквиабсолютной поверхности и, следовательно, определяет метрику пространства постоянной кривизны, что имеет место также и для линейного элемента $\gamma_{\sigma\rho} du^\sigma du^\rho$, так как φ зависит только от u^δ .

Итак, линейный элемент рассматриваемого пространства имеет вид

$$ds^2 = ds_1^2 + e^{-2\varphi} ds_2^2, \quad (7)$$

где

$$ds_1^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \quad (8)$$

$$ds_2^2 = \gamma_{\sigma\rho} du^\sigma du^\rho, \quad (9)$$

причем $g_{\alpha\beta}$ и φ зависят только от u^γ , а $\gamma_{\sigma\rho}$ — только от u^ρ .

Для дальнейшего уточнения вида линейного элемента рассмотрим частный случай соответствия, устанавливаемого связкой абсолютных, предположив

$$X = cx + A, \quad (10)$$

где c — постоянное. Рассмотрим сферу B , определенную равенством

$$X = -cx + B. \quad (11)$$

Для сферы B мы будем иметь равенства

$$B^2 = X^2 + 2cxX + c^2X^2 = 2c,$$

$$AB = X^2 - c^2x^2 = 0,$$

последнее из которых показывает, что она ортогональна абсолютной сфере A .

Так как x можно представить в виде

$$x = -\frac{1}{2c} (B - A),$$

то можно ввести систему координат, приняв за u^α и за u^π параметры семейства сфер A и B соответственно. При этом $\partial_\sigma A = 0$ и $\partial_\alpha B = 0$, благодаря чему

$$\partial_\sigma (AB) = A \partial_\sigma B, \quad \partial_\alpha (AB) = 0,$$

или

$$\partial_\alpha A \partial_\beta B = 0.$$

Следовательно, поверхности $u^\sigma = \text{const}$ будут эквиабсолютными сферами, а поверхности $u^\alpha = \text{const}$ — сферами $n - k$ измерений, вполне ортогональными эквиабсолютным сферам, и система координат будет совпадать с рассмотренной нами в общем случае. Так как здесь $f = \text{const}$, то вследствие (b) $\varphi = \text{const}$ и линейный элемент пространства

$$ds^2 = ds_1^2 + a ds_2^2, \quad (12)$$

где $a = \text{const}$.

Сравнение формул (10) и (11) показывает, однако, что соответствие $x \rightarrow X$ может рассматриваться как инверсия относительно связки сфер A и одновременно связки сфер B , а отсюда следует, что ds_1^2 , равно как и ds_2^2 , есть форма постоянной кривизны.

Про линейный элемент (12) говорят, что он *приводим к двум линейным элементам постоянной кривизны: $n - k$ и k измерений*. Таким образом, внутренняя геометрия соответствия инверсии относительно семейства абсолютов с постоянным нормированием $A^2 = -2c$ определяется линейным элементом, приводимым к двум линейным элементам постоянной кривизны.

Чтобы перейти от общего случая связки абсолютов к случаю постоянного нормирования, нужно сделать перенормирование

$$A \rightarrow f^{-\frac{1}{2}} A,$$

которое будет сопровождаться перенормированием $x \rightarrow \rightarrow f^{\frac{1}{2}} x$, $ds^2 \rightarrow f ds^2$, после чего линейный элемент (7) перейдет в линейный элемент вида (12), откуда следует, что в общем случае $e^{-2\varphi} f = a = \text{const}$, а $f ds_1^2$ есть основная форма пространства постоянной кривизны.

Таким образом, в общем случае инверсии относительно связки абсолютов линейный элемент внутренней геометрии имеет вид (7), причем формы ds_2^2 и $e^{2\varphi} ds_1^2$ суть формы постоянной кривизны.

Отметим еще некоторые свойства рассматриваемого пространства.

Пространство постоянной кривизны k измерений допускает группу движений, зависящую от $\frac{k(k+1)}{2}$ параметров. Это значит, что существуют такие преобразования k параметров $u^\alpha = f^\alpha (\check{u}^\beta)$, $\alpha, \beta = \overline{1, k}$, которые не меняют вид линейного элемента $\gamma_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$ этого пространства. Но в таком случае преобразования $u^\alpha = \check{u}^\alpha$, $u^\sigma = f (\check{u}^\sigma)$ не меняют вид линейного элемента (7), и, следовательно, внутренняя геометрия инверсии по отношению к связке абсолютов, зависящих от $n - k$ параметров, допускает группу преобразований в себя, зависящую от $\frac{k(k+1)}{2}$ параметров и сохраняющую вид линейного элемента.

Обратимся к рассмотрению геодезических линий нашего пространства. Вычисляя коэффициенты связности

$$G_{ij}^\sigma = \frac{1}{2} e^{2\varphi} \gamma^{\sigma\rho} (\partial_i g_{j\rho} + \partial_j g_{i\rho} - \partial_\rho g_{ij}),$$

мы получим

$$G_{\alpha\beta}^\sigma = 0, \quad G_{\alpha\pi}^\sigma = -\frac{\varphi_\alpha}{2} \delta_\pi^\sigma, \quad G_{\pi\omega}^\sigma = \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \pi\omega \end{matrix} \right\},$$

где $\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \pi\omega \end{matrix} \right\}$ есть символ Кристоффеля формы ds_2^2 .

Составляя уравнения геодезических, мы получим последние $n - k$ из них в следующем виде:

$$d^2 u^\sigma + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \pi\omega \end{matrix} \right\} du^\pi du^\omega = -\frac{1}{2} d\varphi du^\sigma,$$

т. е. в виде уравнений геодезических линий пространства постоянной кривизны с линейным элементом ds_2^2 . Таким образом, *всякая геодезическая линия нашего пространства проектируется поверхностями $u^\alpha = \text{const}$ в геодезическую линию эквиабсолютных поверхностей.*

Но в пространствах постоянной кривизны можно установить такую систему координат u^α , в которой геодезические линии выражались бы $k - 1$ линейными уравнениями. Значит, и геодезические нашего пространства выражаются системой конечных уравнений, из которых $k - 1$ уравнений будут линейными. Таким образом, по терминологии В. Ф. Кагана, внутренняя связность инверсии по отношению к $(n - k)$ -мерной связке абсолютов будет $k - 1$ раз проективной.

Пространство, определяемое одномерным пучком абсолютов, будет проективным $n - 2$ раза, или, по Кагану, *субпроективным*. Его линейный элемент будет иметь вид

$$ds^2 = (du^1)^2 + e^{-2\varphi} ds_2^2, \quad (13)$$

где φ — функция от u^1 , а

$$ds_2^2 = \gamma_{\sigma\rho} du^\sigma du^\rho \quad (14)$$

— линейный элемент пространства постоянной кривизны.

В заключение отметим, что все связности, рассмотренные в настоящем параграфе, являются конформно-евклидовыми, как и всякие внутренние связности нормализованного конформного пространства.

ГЛАВА VII

ПРОСТРАНСТВО ДВУХ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 87. Аффинная связность A_2

Многие особенности пространства X_2 связаны с тем, что направления, выходящие из каждой точки этого пространства, образуют проективное многообразие одного измерения. В связи с этим, изучая это пространство, мы будем пользоваться результатами § 20 и, в частности, систематически употреблять для перебрасывания индексов бивектор ε_{ij} и обратный ему бивектор ε^{kl} , связанный с ним условиями

$$\varepsilon^{kl}\varepsilon_{lj} = \delta_j^k \quad (1)$$

или равносильными им

$$\varepsilon^{kl}\varepsilon_{ij} = -\delta_i^k\delta_j^l + \delta_j^k\delta_i^l. \quad (2)$$

В частности, будем считать, что два псевдовектора, связанные соотношениями

$$u_i = \varepsilon_{ik}u^k, \quad u^k = \varepsilon^{ki}u_i, \quad (3)$$

соответствуют одному и тому же направлению. Условие совпадения двух направлений может быть также охарактеризовано равенством

$$u^kv_k = 0. \quad (4)$$

Если в X_2 задана произвольная аффинная связность без кручения, то для любого бивектора имеет место соотношение

$$\nabla_k\varepsilon_{ij} = 2\omega_k\varepsilon_{ij}, \quad (5)$$

где ω_k — соответствующий ему дополнительный вектор, а для бивектора, обратного данному, вследствие (1),

$$\nabla_k\varepsilon^{ij} = -2\omega_k\varepsilon^{ij}. \quad (6)$$

Вектор ω_k будет градиентен только в случае эквиаффинной связности (§ 41); поэтому, вообще говоря, бивектор

нельзя пронормировать так, чтобы его ковариантная производная была равна нулю и его выбор был определен с точностью до множителя.

Если направление u^i переносится параллельно, то его контравариантный вектор подчинен условию

$$\delta u^i = \lambda u^i, \quad (7)$$

а для ковариантного вектора того же направления

$$\delta u_i = \mu u_i. \quad (8)$$

Так как тензор кручения кососимметричен по своим нижним индексам, то, согласно (7,13),

$$S_{ij}^k = \varepsilon_{ij} \varepsilon^{kl} S_l = (\delta_i^k \delta_j^l - \delta_j^k \delta_i^l) S_l = \delta_i^k S_j - \delta_j^k S_i.$$

Таким образом, всякая аффинная связность в X_2 является полусимметрической (§ 40).

Аналогично,

$$R_{ijk}{}^l = \varepsilon_{ji} R_{.k}^l, \quad (9)$$

а так как

$$R_{jk} = R_{ljk}{}^l = \varepsilon_{ji} R_{.k}^i,$$

то тензор $R_{.k}^i$ совпадает с тензором Риччи.

Применяя (2), мы приходим еще к следующему выражению тензора кривизны:

$$R_{ijk}{}^l = 2\delta_{[i}^l R_{j]k}, \quad (10)$$

которое показывает, что задание тензора Риччи в X_2 равносильно заданию тензора кривизны.

Пользуясь полученным соотношением, мы можем упростить условия интегрируемости. Так, например, формула (33,*) может быть переписана в виде

$$\nabla^s \nabla_s A_i^j = -R_{.k}^j A_i^k + R_{.i}^k A_k^j + 2S^k \nabla_k A_i^j.$$

Аналогичные формулы получатся без труда и для тензоров других валентностей.

§ 88. Связность Вейля W_2

Характер угловой метрики пространства Вейля двух измерений определяется знаком дискриминанта

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \quad (1)$$

основного тензора g_{ij} . Эта метрика будет *эллиптической*, если $g > 0$, и *гиперболической*, если $g < 0$.

Будем по-прежнему перебрасывать индексы с помощью бивектора, считая при этом, что данный бивектор является дискриминантным для тензора g_{ij} (§ 7), т. е. плотность удовлетворяет условию

$$\varepsilon_{12}^2 = \sigma g, \quad (2)$$

где $\sigma = +1$ для эллиптической и $\sigma = -1$ для гиперболической метрики. В таком случае, согласно (7,19), мы будем иметь для тензора $\tilde{g}^{ij}$, обратного основному,

$$\tilde{g}^{ij} = \sigma g^{ij}, \quad (3)$$

а ко- и контравариантные координаты основного тензора будут связаны соотношением

$$g^{ik} g_{kj} = \sigma \delta_j^i. \quad (4)$$

Перенормирование основного тензора, очевидно, сопровождается следующим перенормированием введенных величин:

$$\left. \begin{aligned} g_{ij} &= \lambda \check{g}_{ij}, \\ g^{ij} &= \lambda^{-1} \check{g}^{ij}, \end{aligned} \right\} (5) \quad \left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \lambda \check{\varepsilon}_{ij}, \\ \varepsilon^{ij} &= \lambda^{-1} \check{\varepsilon}^{ij}, \end{aligned} \right\} (5')$$

вследствие чего смешанные координаты основного тензора

$$g^i_{\cdot j} = \varepsilon^{ik} g_{kj} \quad (6)$$

остаются инвариантными при перенормировании.

Аффинор $g^i_{\cdot j}$ играет особую роль в дальнейшем изложении, и мы сохраним поэтому для него особое наименование, называя его *версором* данного пространства W_2 .

Отметим две формулы, связывающие координаты версора, следующие непосредственно из симметрии основного тензора и формулы (4):

$$g^k_{\cdot k} = 0, \quad (7)$$

$$g^i_{\cdot k} g^k_{\cdot j} = -\sigma \delta_j^i. \quad (7')$$

Связь между двумя векторами, характеризуемая условием

$$\tilde{a}_i = g_{ik} a^k, \quad (8)$$

тоже не зависит от нормирования, и мы будем называть такой вектор $\tilde{a}_i$ сопряженным вектору a_i .

Разрешая (8), получим

$$a^k = \sigma g^{ki} \tilde{a}_i, \quad (9)$$

или

$$a_k = -\sigma g_{ki} \tilde{a}^i, \quad (10)$$

следовательно, сопряженность будет взаимной в случае гиперболической метрики и «взаимной с точностью до знака» в эллиптическом случае.

Так как

$$g_{ij} a^i \tilde{a}^j = \tilde{a}_i \tilde{a}^i = 0, \quad (11)$$

то сопряженные векторы ортогональны между собой. С другой стороны,

$$g_{ij} a^i a^j = a^i \tilde{a}_i = -a_i \tilde{a}^i = \sigma g_{ij} \tilde{a}^i \tilde{a}^j, \quad (12)$$

и, называя отношением векторов b и a величину

$$\frac{a}{b} = \left| \frac{g_{ij} b^i b^j}{g_{pq} a^p a^q} \right|^{\frac{1}{2}},$$

мы можем сказать, что отношение сопряженных векторов равно единице.

Условие (9), которое может быть также переписано в виде

$$\tilde{a}^i = g^i_k a^k, \quad (13)$$

показывает, что воздействие версора на вектор переводит его в сопряженный и сводится к повороту данного вектора на прямой угол.

Связность пространства Вейля характеризуется любым из двух условий:

$$\nabla_k g_{ij} = 2\omega_k g_{ij}, \quad \nabla_k \tilde{g}^{ij} = -2\omega_k \tilde{g}^{ij}. \quad (14)$$

Переписывая (3) в развернутом виде:

$$\tilde{g}^{ij} = \sigma \varepsilon^{ip} \varepsilon^{jq} g_{pq},$$

и полагая

$$\nabla_k \varepsilon^{ij} = -2\omega'_k \varepsilon^{ij},$$

после дифференцирования (3) получим

$$\omega'_k = \omega_k,$$

а после дифференцирования (87,1) получим следующие формулы для ковариантных производных дискриминантного бивектора:

$$\nabla_k \varepsilon_{ij} = 2\omega_k \varepsilon_{ij}, \quad \nabla_k \varepsilon^{ij} = -2\omega_k \varepsilon^{ij}. \quad (15)$$

Наконец, из (6) следует

$$\nabla_k g^i_{.j} = 0 \quad (16)$$

— условие, которое, в силу (13), равносильно тому, что *сопряженность векторов сохраняется при их параллельном перенесении*.

В дальнейшем особое внимание будет уделено случаю эллиптической метрики ввиду приложений к теории поверхностей собственно евклидова пространства. Эллиптическая угловая метрика в каждой точке W_2 ничем не отличается от метрики евклидовой плоскости. Вследствие этого всякий вектор, равный по длине вектору a и образующий с ним угол φ , можно представить в виде

$$b^i = a^i \cos \varphi + \tilde{a}^i \sin \varphi,$$

так что

$$b^i = (\varphi)^i_{.k} a^k, \quad (17)$$

где

$$(\varphi)^i_{.k} = \delta^i_k \cos \varphi + g^i_{.k} \sin \varphi \quad (18)$$

есть *аффинор поворота на угол φ* .

При абсолютном дифференцировании

$$\delta (\varphi)^i_{.k} = g^l_{.k} (\varphi)^i_{.l} d\varphi. \quad (19)$$

§ 89. Изотропные направления метрики Вейля

Направление в точке W_2 называется *изотропным*, если оно удовлетворяет условию

$$g_{ij} v^i v^j = 0, \quad (1)$$

которое показывает, что *вектор, сопряженный вектору изотропного направления, коллинеарен ему.*

Дифференцируя и принимая во внимание (88,14), получим

$$g_{ij}v^i\nabla_kv^j = 0,$$

откуда

$$\nabla_kv^i = \mu_kv^i, \quad (2)$$

и, следовательно, изотропные направления образуют поле абсолютно параллельных направлений (§ 49).

Обратно, пусть некоторое пространство X_2 допускает существование двух независимых полей абсолютно параллельных направлений, т. е., кроме v^i , удовлетворяющего (2), существует также w^i , для которого

$$\nabla_kw^i = \nu_kw^i. \quad (2')$$

В таком случае мы можем построить тензор

$$a^{ij} = v^{(i} w^{j)}, \quad (3)$$

для которого вследствие (2), (2') и (3) будем иметь

$$\nabla_ka^{ij} = (\mu_k + \nu_k) a^{ij} \quad (4)$$

— такое равенство, которое показывает, что рассматриваемая связность есть связность Вейля.

Итак, *связность W_2 характеризуется существованием двух различных полей абсолютно параллельных направлений, причем если других таких направлений нет, то они совпадают с изотропными направлениями угловой метрики пространства.* Следует, конечно, иметь в виду, что в случае эллиптической метрики, т. е. если форма $g_{ij}du^idu^j$ является определенной, изотропные поля будут комплексными сопряженными, а действительны они только в том случае, когда метрика W_2 гиперболическая.

Если пространство X_2 допускает существование трех полей абсолютно параллельных направлений, то оно допускает существование и ∞^1 таких полей. Действительно, направление, образующее постоянное ангармоническое отношение с тремя данными, переносящимися параллельно, тоже переносится параллельно, и если направления трех полей переносятся параллельно по всякому пути, то направление всякого четвертого поля, образующего постоянное ангармоническое отношение с тремя данными,

тоже переносится параллельно по любому пути, или является абсолютно параллельным.

Вследствие произвола в выборе значения ангармонического отношения можно считать, что в рассматриваемом случае поле абсолютных параллельных направлений может быть построено в любом направлении, или *пространство допускает абсолютный параллелизм направлений*. В § 49 мы видели, что при $n > 2$ таким пространством является R_n .

Посмотрим теперь, как обстоит дело в X_2 . Условие существования ∞^1 полей абсолютно параллельных направлений равносильно неограниченной интегрируемости уравнения

$$\nabla_k v^i = \lambda_k v^i.$$

Составляя условие интегрируемости, мы получим для A_2 без кручения

$$R^i_{.k} v^k = \lambda v^i,$$

а вследствие произвольности v^i

$$R^i_{.k} = \lambda \delta^i_k, \quad R_{ij} = \lambda \epsilon_{ij},$$

или

$$R_{(ij)} = 0. \quad (5)$$

Таким образом, обращение тензора кривизны в нуль не является необходимым для существования абсолютного параллелизма направлений в X_2 . Пространство, допускающее такой параллелизм, мы будем называть *квазиевклидовым*. Согласно (5) для квазиевклидова пространства характерна косая симметрия его тензора Риччи.

Поля параллельных направлений квазиевклидова пространства можно комбинировать попарно ∞^2 способами, получая каждый раз тензор a^{ij} , который согласно (3) можно рассматривать как основной тензор метрики Вейля. Таким образом, *квазиевклидово пространство можно рассматривать как частный случай пространства Вейля, в котором угловая метрика может быть выбрана ∞^2 существенно различными способами*.

Рассмотрим геодезические линии квазиевклидова пространства. Они распадаются на ∞^1 семейств векторных линий полей абсолютно параллельных направлений, причем

каждое такое семейство образует с тремя другими постоянное ангармоническое отношение. Обозначая через $k = \frac{du^2}{du^1}$ «угловой коэффициент» направления линии, мы получим для четырех полей условие постоянства ангармонического отношения:

$$\frac{k - k_1}{k_2 - k} : \frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_3} = \text{const},$$

и всякое семейство геодезических определяется через три данных уравнением первого порядка вида

$$\frac{a_p du^p}{b_q du^q} = c = \text{const}. \quad (6)$$

Таким образом, квазиевклидово пространство допускает существование дробно-линейного первого интеграла уравнения геодезических линий.

Мы будем называть всякое двупараметрическое семейство линий в X_2 полем, а поле, определенное уравнением (6), — *расслояемым*. Расслояемое поле распадается на ∞^1 *расслояющих* семейств, соответствующих различным значениям постоянного c , так что направления всяких четырех расслояющих семейств образуют в каждой точке ангармоническое отношение, не зависящее от положения точки.

Покажем, что всякому расслоению данного расслояемого поля соответствует вполне определенная квазиевклидова связность, для которой данное поле является геодезическим. Перепишем уравнение (6) в виде

$$(a_i + cb_i) du^i = 0 \quad (7)$$

и будем искать такую симметрическую связность, в которой удовлетворяются уравнения

$$\nabla_k a_i = \omega_k a_i, \quad \nabla_k b_i = \omega_k b_i.$$

Свертывая с некоторым бивектором, получим два уравнения:

$$\varepsilon^{ki} \partial_k a_i = \omega_k a^k, \quad \varepsilon^{ki} \partial_k b_i = \omega_k b^k,$$

которые разрешимы относительно ω_k вследствие независимости векторов a_i и b_i и имеют единственное решение.

Затем рассмотрим тензор $g_{ij} = a_{(i} b_{j)}$, для которого получим

$$\nabla_k g_{ij} = 2\omega_k g_{ij}$$

— уравнение, определяющее связность как связность Вейля. С другой стороны, дифференцируя уравнение

$$(a_i + cb_i)v^i = 0,$$

видим, что любое его решение удовлетворяет условию

$$\nabla_k v^i = \omega'_k v^i,$$

вследствие чего пространство допускает существование полей абсолютно параллельных направлений, т. е. является квазиевклидовым.

Данному расслояемому полю линий, вообще говоря, соответствует одна квазиевклидова геометрия. Исключения будут иметь место только для семейств, расслояемых существенно различными способами.

§ 90. Векторное поле в W_2

Будем называть *работой* ковариантного вектора на дуге γ интеграл

$$P = \int_{\gamma} a_i du^i, \quad (1)$$

а *циркуляцией* — работу по замкнутому контуру.

Применяя формулу Грина для циркуляции, получим

$$\oint a_i du^i = \iint_{\Sigma} (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) (d_1 u^1 d_2 u^2 - d_1 u^2 d_2 u^1),$$

где d_1 и d_2 соответствуют независимым направлениям дифференцирования.

Вводя произвольный бивектор ε_{ij} , можно привести подынтегральное выражение к инвариантному виду:

$$\varepsilon^{21} (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) \varepsilon_{12} (d_1 u^1 d_2 u^2 - d_1 u^2 d_2 u^1) = \varepsilon^{ij} \partial_j a_i d_1 u^s d_2 u_s.$$

Ротором вектора a_i мы будем называть относительный инвариант

$$\text{rot } a = \varepsilon^{ji} \partial_i a_j, \quad (2)$$

обращение в нуль которого характеризует градиентный вектор. Пользуясь этим инвариантом, можно записать теорему Грина в виде

$$\oint_{\gamma} a_i du^i = \iint_{\Sigma} \text{rot } a d_1 u^s d_2 u_s, \quad (3)$$

показывающем, что интеграл в правой части, или *интегральный ротор*, есть инвариант перенормирования бивектора.

В пространстве W_2 введем также понятие *потока ковектора* a_i через дугу γ , понимая под этим работу вектора, сопряженного a_i , на той же дуге, или интеграл

$$\Pi = \int_{\gamma} \tilde{a}_i du^i. \quad (4)$$

Будем также называть *дивергенцией* вектора a_i ротор сопряженного вектора, или относительный инвариант:

$$\operatorname{div} a = \varepsilon^{ji} \partial_i \tilde{a}_j. \quad (5)$$

Дивергенцию можно выразить еще иначе, используя ковариантное дифференцирование. Так как связность не имеет кручения, то

$$\operatorname{div} a = \varepsilon^{ji} \nabla_i \tilde{a}_j,$$

но вследствие (88,16)

$$\nabla_i g^j_k a^k = g^j_k \nabla_i a^k,$$

откуда

$$\operatorname{div} a = g^{ij} \nabla_i a_j. \quad (6)$$

Согласно формуле (3) связь между потоком через замкнутый контур и *интегральной дивергенцией* области, ограниченной этим контуром, выразится равенством

$$\oint_{\gamma} \tilde{a}_i du^i = \iint_{\Sigma} \operatorname{div} a d_1 u^s d_2 u_s, \quad (7)$$

показывающим, что интегральная дивергенция не зависит от перенормирования бивектора, так же как и подынтегральное выражение левой части

$$\tilde{a}_i du^i = - g^k_i a_k du^i.$$

Обращение в нуль дивергенции характеризует такой вектор, который становится градиентом после поворота на прямой угол, а поле таких векторов называется *соленоидальным*.

Поле, являющееся одновременно и потенциальным, и соленоидальным, называется *полем Лапласа*. Его

потенциал U удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = g^{rs} \nabla_r \nabla_s U = 0, \quad (8)$$

т. е. линейному уравнению в частных производных второго порядка. Согласно теореме С. Ковалевской, уравнение (8) имеет решение по крайней мере в той области, где его коэффициенты — аналитические функции криволинейных координат.

Из определения лапласова поля следует, что вектор, сопряженный вектору поля a_i , будет градиентом:

$$\tilde{a}_i = \partial_i V,$$

причем это новое поле будет тоже лапласовым. Потенциал этого поля, *сопряженного* данному, связан с потенциалом данного поля уравнениями

$$\partial_i V = \tilde{\partial}_i U = -g_{i.}^k \partial_k U. \quad (9)$$

Линии уровня потенциалов двух сопряженных лапласовых полей образуют ортогональную сеть, и если эти потенциалы принять за криволинейные координаты, то эти координаты называются *изотермическими*.

Чтобы найти вид основной метрической формы

$$\Phi = g_{ij} du^i du^j \quad (10)$$

в изотермических координатах, положим $u^1 = U$, $u^2 = V$ и потребуем, чтобы уравнения (9) удовлетворялись. Это дает нам два условия:

$$g_{1.}^1 = 0, \quad g_{2.}^1 = -1, \quad (10')$$

а из соотношений (88,7) и (88,8) мы получим

$$g_{2.}^2 = 0, \quad g_{1.}^2 = \sigma, \quad (10'')$$

откуда

$$g_{11} = \sigma \varepsilon, \quad g_{22} = \varepsilon, \quad g_{12} = 0,$$

а метрическая форма в изотермических координатах

$$\Phi = \varepsilon [\sigma (du^1)^2 + (du^2)^2]. \quad (11)$$

Уравнения (9), связывающие потенциалы двух произвольных сопряженных лапласовых полей, принимают в изотермических координатах вид

$$\partial_2 V = \partial_1 U, \quad \partial_1 V = -\sigma \partial_2 U, \quad (12)$$

а уравнение Лапласа — вид

$$\partial_{11}U + \sigma\partial_{22}U = 0. \quad (13)$$

В случае эллиптической метрики $\sigma = 1$ и уравнения (12) совпадают с условиями Коши — Римана:

$$\partial_2V = \partial_1U, \quad \partial_1V = -\partial_2U, \quad (14)$$

а следовательно, функции U и V могут рассматриваться как действительная и мнимая части аналитической функции

$$W = f(u^1 + iu^2) = U + iV, \quad (15)$$

т. е. являются сопряженными гармоническими функциями в плоскости комплексного переменного $z = u^1 + iu^2$.

В случае гиперболической метрики уравнения (12) имеют вид

$$\partial_2V = \partial_1U, \quad \partial_1V = \partial_2U \quad (16)$$

и могут быть просто проинтегрированы, если перейти от изотермических координат к координатам

$$x = u^1 + u^2, \quad y = u^1 - u^2, \quad (17)$$

в которых метрическая форма принимает вид

$$\Phi = \varepsilon dx dy \quad (18)$$

и которые поэтому являются *изотропными*. Производя замену переменных, вместо системы (16) получим

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad (19)$$

решение ее имеет вид

$$U = X(x) + Y(y), \quad V = X(x) - Y(y). \quad (20)$$

Возвращаясь к общему случаю и подразумевая, что в пространстве W_2 основной тензор может быть подвергнут любому перенормированию, мы заключаем из (11), что основная метрическая форма в изотермических координатах может быть приведена к виду

$$\Phi = \sigma (du^1)^2 + (du^2)^2, \quad (21)$$

который совпадает с видом метрической формы E_2 . Отсюда следует теорема: *всякое W_2 может быть отображено конформно на плоскость Евклида.*

§ 91. Конформное отображение

Соотношениям, определяющим конформное преобразование в X_2 , можно придать особенно простой и удобный вид. Рассмотрим два W_2 , связанных конформным преобразованием, и пусть ∇ и $\check{\nabla}$ — знаки ковариантного дифференцирования в соответствующих связностях. Разлагая разность ковариантных производных произвольного вектора a_i по этому вектору и сопряженному ему вектору $\check{a}_i$, мы получим

$$\check{\nabla}_k a_i = \nabla_k a_i + \lambda_k a_i + \mu_k \check{a}_i = \nabla_k a_i - T_{ki}^r a_r,$$

где, согласно (44,3),

$$T_{ki}^r = p_k \delta_i^r + p_i \delta_k^r - p_m g^{mr} g_{ki} = -(\lambda_k \delta_i^r - \mu_k g_i^r).$$

Но

$$T_{ri}^r = 2p_i = -(\lambda_i + \check{\mu}_i), \quad T_{kr}^r = 2p_k = -2\lambda_k,$$

$$\lambda_i = -p_i, \quad \mu_i = -\sigma \check{p}_i,$$

откуда

$$T_{ij}^k = p_i \delta_j^k + \sigma \check{p}_i g_j^k. \quad (1)$$

Рассмотрим два вектора $\check{a}_i$ и a_i , заданные в W_2 с эллиптической метрикой, образующие угол φ и находящиеся в отношении ρ , так что

$$\check{a}^i = \rho (\varphi)_k^i a^k.$$

Предположим, что каждый из этих векторов переносится параллельно в связностях $\check{\Gamma}$ и Γ соответственно. Дифференцируя и принимая во внимание, что $\check{\delta} \check{a}_i = \delta a_i = 0$, мы получим, согласно (88,19),

$$\left(\frac{d\rho}{\rho} + p_m du^m \right) \check{a}^i + \rho (d\varphi + \check{p}_m du^m) \check{a}^i = 0,$$

откуда

$$p_m du^m = -d \ln \rho, \quad \check{p}_m du^m = -d\varphi.$$

Интегрируя вдоль некоторого пути AB и предполагая, что векторы a^i и $\check{a}^i$ совпадают в его начале, мы будем иметь

$$\ln \rho = - \int p_m du^m, \quad \varphi = - \int \tilde{p}_m du^m, \quad (2)$$

а это приведет к следующему результату:

Если векторы a^i и $\check{a}^i$ совпадают в точке A и переносятся параллельно по пути AB каждый в связности Γ и $\check{\Gamma}$ соответственно, причем эти связности находятся в конформном соответствии, то работа вектора конформного преобразования по пути AB равна логарифму отношения $\check{a}^i$ к a^i в точке B , а поток того же вектора через AB равен углу между a^i и $\check{a}^i$ в той же точке.

Если поле векторов p_i соленоидально, то его поток по всякому замкнутому контуру равен нулю, или, иначе говоря, не зависит от пути, соединяющего точки A и B . Это значит, что для перехода от связности Γ к связности $\check{\Gamma}$ достаточно задать скалярное поле φ ; тогда, если вектор $\check{a}^i$ переносится параллельно в связности $\check{\Gamma}$, то направление вектора a^i , образующего в каждой точке пути угол φ с $\check{a}^i$, переносится параллельно в связности Γ . Будем говорить, что в этом случае *связность Γ определена полем поворотов φ над связностью $\check{\Gamma}$.*

Произвольная связность Вейля Γ , определенная основным тензором g_{ij} и дополнительным ω_i , может рассматриваться как полученная в результате конформного преобразования с вектором $p_i = \omega_i$ римановой связности $\check{\Gamma}$ с основным тензором g_{ij} (§ 44). Однако тензор g_{ij} не определяется однозначно, а может быть перенормирован, испытывая вместе с вектором ω_i преобразования (42,4) и (42,5):

$$'g_{ij} = \lambda^2 g_{ij}, \quad '\omega_k = \omega_k + \partial_k \ln \lambda.$$

Для того чтобы после перенормирования вектор ω_k стал соленоидальным, следует найти такое λ , которое удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} (\omega + \operatorname{grad} \ln \lambda) = 0, \quad (3)$$

Это уравнение первого порядка в частных производных всегда имеет решение, определяемое с произволом в выборе функции $\ln \theta$, удовлетворяющей уравнению Лапласа

$$\nabla^k \widetilde{\partial_k \ln \theta} = 0.$$

Итак, основной тензор метрики Вейля всегда может быть пронормирован так, чтобы дополнительный вектор стал соленоидальным. Будем называть это нормирование псевдоканоническим и заметим, что оно определяется с произволом в выборе гармонической функции.

Согласно предыдущему связность Γ при псевдоканоническом нормировании определяется полем поворотов над римановой связностью основного тензора, и, таким образом, всякая связность W_2 определяется полем поворотов над некоторой связностью Римана, причем основной тензор последней будет псевдоканонически нормированным тензором данной W_2 , а угол поворота — потенциалом вектора, сопряженного дополнительному.

Применяя предыдущие результаты к квазиевклидову пространству, мы должны учесть то, что связность, определенная полем поворотов над связностью с абсолютным параллелизмом направлений, очевидно, будет связностью того же типа. Но риманова квазиевклидова W_2 есть E_2 . Итак, всякая квазиевклидова связность может быть определена полем поворотов над евклидовой связностью. Определим это поле по формуле (3) и положим

$$\partial_i \varphi = \varphi_i = -\tilde{p}_i, \quad p_i = \tilde{\varphi}_i,$$

вследствие чего коэффициенты произвольной квазиевклидовой связности могут быть представлены в виде

$$\Gamma_{ki}^r = \overset{0}{\Gamma}_{ki}^r - \tilde{\varphi}_k \delta_i^r + \varphi_k g_i^r, \quad (4)$$

где $\overset{0}{\Gamma}_{ki}^r$ — коэффициенты евклидовой связности, g_i^r — ее версор, а φ_i — градиент произвольной скалярной функции.

Для того чтобы формулы (4) определяли конформное отображение двух E_2 друг на друга, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\tilde{\varphi}_i$ был градиентом (§ 44), а это возможно тогда и только тогда, когда φ — гармоническая функция. Но, согласно (3), в таком случае

$$p_i = -\partial_i \ln \rho,$$

а так как, с другой стороны, $p_i = \bar{\varphi}_i$, то φ есть гармоническая функция, сопряженная функции $\ln \rho$; поэтому $\ln(\rho e^{i\varphi})$, а также $\rho e^{i\varphi} = f(x + iy)$ суть аналитические функции аргумента $x + iy$, где x и y — прямоугольные декартовы координаты плоскости со связностью Γ . С другой стороны, если $\check{x}$, $\check{y}$ суть прямоугольные координаты плоскости со связностью $\check{\Gamma}$, то они являются изотермическими координатами связности Γ , а значит,

$$\check{x} + i\check{y} = f(x + iy)$$

есть тоже аналитическая функция. Но линейные элементы связностей Γ и $\check{\Gamma}$ имеют вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = |dx + i dy|^2,$$

$$d\check{s}^2 = d\check{x}^2 + d\check{y}^2 = |d\check{x} + i d\check{y}|^2,$$

и, следовательно,

$$d\check{s}^2 = \left| \frac{d(\check{x} + i\check{y})}{d(x + iy)} \right|^2 ds^2 = |f'|^2 ds^2,$$

так что

$$\rho = |f'|,$$

или

$$\rho e^{i\varphi} = f'(x + iy).$$

Итак, при конформном отображении двух E_2 друг на друга коэффициенты связности преобразуются по формуле (4), где φ_i — градиент аргумента производной той аналитической функции, которая осуществляет отображение одной плоскости на другую.

§ 92. Тензор кривизны W_2

Условия интегрируемости основного уравнения W_2 (88,14) имеют, согласно § 87, вид

$$\nabla^s \nabla_s g_{ij} = R^m_{\cdot i} g_{mj} + R^m_{\cdot j} g_{im} = 2\nabla^s \omega_s g_{ij},$$

или

$$R^m_{\cdot (i} g_{j) m} = \nabla^s \omega_s g_{ij},$$

что равносильно условию

$$R^m_{\cdot i} g_{jm} = \nabla^s \omega_s g_{ij} + \lambda \varepsilon_{ij},$$

или окончательно:

$$R_{ij} = K g_{ij} + Q \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Так как левая часть равенства (1) не зависит от нормирования основного и дискриминантного тензоров, то величины K и Q являются относительными инвариантами веса -1 при преобразовании

$$g_{ij} \rightarrow \lambda g_{ij}. \quad (2)$$

Интегральные инварианты

$$I_K = \iint_{\Sigma} K d_1 u^s d_2 u_s, \quad I_Q = \iint_{\Sigma} Q d_1 u^s d_2 u_s \quad (3)$$

не зависят от нормирования, так как подынтегральное выражение $d_1 u^s d_2 u_s$ содержит компоненту дискриминантного тензора, преобразующегося так же, как и основной. Мы будем называть I_K и I_Q соответственно *интегральной кривизной* и *интегральным растяжением* той области Σ , на которую распространяется интегрирование.

Так как симметрия тензора Риччи характерна для римановой, а его косая симметрия — для квазиевклидовой связности, то можно также утверждать, что *тождественное обращение в нуль интегрального растяжения характеризует риманову связность, тождественное обращение в нуль интегральной кривизны — квазиевклидову связность, а тождественное исчезновение обоих инвариантов — евклидову связность в X_2 .*

Чтобы дать истолкование введенным инвариантам, выясним закон преобразования K и Q при конформном отображении.

Из (44,7) и (44,8) следует

$$\begin{aligned} \check{R}_{jk} - R_{jk} &= p_{kj} - p_{jk} - g^{mn} p_{mn} g_{jk} = \\ &= \nabla_k p_j - \nabla_j p_k - g^{mn} p_{mn} g_{jk} = -\varepsilon_{jk} \varepsilon^{mn} \nabla_n p_m - \\ &\quad - g^{mn} \nabla_m p_n g_{jk} = -\operatorname{rot} p \varepsilon_{jk} - \operatorname{div} p g_{jk}. \end{aligned}$$

Таким образом, в W_2 преобразование тензора кривизны при конформном отображении вполне определяется

следующими соотношениями:

$$\check{K} = K - \operatorname{div} p, \quad \check{Q} = Q - \operatorname{rot} p, \quad (4)$$

где p — вектор конформного преобразования.

Предположив, что преобразование переводит данную связность Γ в квазиевклидову связность $\check{\Gamma}$, мы получим

$$I_K = \int_{\Sigma} \operatorname{div} p \, d_1 u^s d_2 u_s = \oint_{\gamma} \tilde{p}_k \, du^k.$$

Но согласно (91,3) последний интеграл выражает угол поворота вектора a^i , переносимого параллельно в связности Γ , по отношению к направлению $\check{a}^i$, переносимому параллельно в связности $\check{\Gamma}$. Однако последняя обладает абсолютным параллелизмом направлений и направление $\check{a}^i$ не меняется при обходе по замкнутому контуру. Таким образом, мы приходим к следующему заключению: *интегральная кривизна области Σ равна углу поворота направления, обносимого параллельно по контуру γ , ограничивающему эту область.*

Предполагая, что связность $\check{\Gamma}$ риманова, и рассуждая аналогично, мы приходим и к следующему результату: *интегральное растяжение равно логарифму относительного удлинения вектора, обносимого параллельно по контуру, ограничивающему данную область.*

В случае связности Римана величина K , соответствующая каноническому нормированию основного тензора, называется *гауссовой кривизной* V_2 . Интегральная кривизна равна интегралу «по поверхности» от гауссовой кривизны, так как $d_1 u^s d_2 u_s$ есть элемент площади. Применяя теорему о среднем, мы получим

$$K_A = \lim_{\Sigma \rightarrow A} \frac{K}{\Sigma} = \lim_{\Sigma \rightarrow A} \frac{\Phi}{\Sigma}, \quad (5)$$

т. е. *гауссова кривизна V_2 в точке A равна пределу отношения угла поворота вектора, переносимого параллельно по замкнутому контуру, окружающему точку A , к площади области, ограниченной этим контуром, если он стягивается к этой точке.*

Возвращаясь к общему случаю, используем соотношение (1) для вывода признака связности Вейля. Из (1)

имеем

$$R_{(ij)} = Kg_{ij}. \quad (6)$$

Дифференцируя и принимая во внимание основное уравнение, получим

$$\nabla_s R_{(ij)} = (\partial_s K + 2\omega_s) g_{ij},$$

а при $K \neq 0$

$$\nabla_s R_{(ij)} = 2\rho_s R_{(ij)}. \quad (7)$$

Обратно, если в некотором A_2 имеет место (7) и $\text{Det} \| R_{(ij)} \| \neq 0$, то A_2 есть W_2 с основным тензором $R_{(ij)}$. Если же $R_{(ij)} = 0$, то условие (7) выполняется и связность будет квазиевклидовой.

Таким образом, для того чтобы аффинная связность A_2 была вейлевой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $\| R_{(ij)} \|$ был равен двум и выполнялось условие (7). При $n > 2$ аналогичное условие, характеризующее W_n , до сих пор не получено.

Рассмотрим в заключение проективно-евклидово V_2 . Так как условия (47,4) выполнимы для всякой A_2 , то остается только условие (43,6), которое принимает вид

$$\nabla^s R_{si} = 0.$$

Но

$$R_{ij} = Kg_{ij}$$

и, следовательно,

$$\nabla^s Kg_{si} = 0,$$

откуда

$$K = \text{const.}$$

Итак, двумерная проективно-евклидова риманова связность характеризуется тем, что ее гауссова кривизна постоянна.

§ 93. Геометрия сетей

Задание поляритета в проективном пространстве одного измерения равносильно заданию некоторой инволюции. Вследствие этого поле поляритетов, определенное в X_2 заданием некоторого псевдотензора a_{ij} , есть поле инво-

люций в пространствах направлений, исходящих из каждой точки этого X_2 . Если эти инволюции являются гиперболическими, то в каждой точке существует два двойных направления инволюций, определяемых равенствами

$$a_{ij}v^iv^j = 0, \quad a_{ij}w^iw^j = 0. \quad (1)$$

При условии дифференцируемости функции $a_{ij} = a_{ij}(u^1, u^2)$ поля направлений v^i и w^j имеют огибающие линии — интегральные кривые уравнения

$$a_{ij}du^idu^j = 0, \quad (2)$$

образующие два семейства линий, или *сеть линий*, в X_2 .

В общем случае любого поля действительных непараболических инволюций говорят, что в X_2 задана сеть, считая при этом, что в случае гиперболических инволюций направления сети v^i , w^i и ее линии действительны, а в случае эллиптических инволюций направления сети и ее линии мнимые. Так как случай параболических инволюций исключается, то, говоря о сети, мы всегда будем предполагать, что дискриминант ее тензора

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3)$$

Ангармоническое отношение двух направлений x^i и y^i и направлений сети, исходящих из одной точки, называется *ангармоническим отношением данных направлений относительно сети*, а логарифм этого отношения с соответственно выбранным множителем, не зависящим от точки, называется *углом* этих направлений относительно сети. Согласно общей теории проективной метрики, для этого угла

$$\cos \frac{\widehat{xy}}{c} = \frac{a_{ij}x^iy^j}{a_x a_y}, \quad (4)$$

$$\sin \frac{\widehat{xy}}{c} = \frac{\varepsilon_{ij}x^iy^j}{a_x a_y}, \quad (5)$$

где $a_x^2 = a_{ij}x^ix^j$, $a_y^2 = a_{ij}y^iy^j$, $c = \text{const}$ и ε_{ij} — дискриминантный бивектор тензора a_{ij} .

Направления x^i и y^j называются *сопряженными* относительно сети, если они сопряжены в инволюции a_{ij} , т. е. разделяются гармонически направлениями сети, или

удовлетворяют условию

$$a_{ij}x^iy^j = 0. \quad (6)$$

Ангармоническим отношением двух сетей, а также их взаимным углом мы будем называть ангармоническое отношение их направлений и угол направлений одной сети относительно другой. Пусть тензор второй сети

$$b_{ij} = x_{(i}y_{j)}, \quad (7)$$

где x^i и y^j — двойные направления.

Введя обозначения

$$(ab) = a^{ij}b_{ij}, \quad (a^2) = a^{ij}a_{ij}, \quad (b^2) = b^{ij}b_{ij} \quad (8)$$

и применяя формулы (20, 10), (20, 13) и (20, 14), выведенные для двух инволюций, мы получим

$$a_{ij}x^ix^ja_{kl}y^ky^l = (ab)^2 - (a^2)(b^2) = D(ab),$$

откуда для взаимного угла сетей

$$\cos \frac{\varphi}{c} = \frac{(ab)}{\sqrt{D(ab)}}, \quad (9)$$

$$\sin \frac{\varphi}{c} = \frac{\sqrt{-(a^2)(b^2)}}{\sqrt{D(ab)}}, \quad (10)$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{c} = - \frac{(a^2)(b^2)}{(ab)^2}. \quad (11)$$

Тензоры сетей, направления которых разделяются гармонически и которые мы будем называть *аполярными*, связаны условием

$$(ab) = 0. \quad (12)$$

Всякие две сети с различными линиями имеют единственную общую аполярную им сеть, или *главную сеть пары*. Согласно (20, 18) тензор главной сети выражается через тензоры данных сетей по формуле

$$c_{ij} = a^k_{\cdot(i}b_{j)k}, \quad (13)$$

а тензоры трех сетей, имеющих общую главную сеть, находятся в линейной зависимости (§ 20).

Если взаимный угол двух сетей не зависит от точки, то сети называются *взаимно изогональными*. При условии такого нормирования их тензоров, при котором

$$(a^2) = \text{const}, \quad (b^2) = \text{const}, \quad (14)$$

условие взаимной изогональности имеет вид

$$(ab) = \text{const.} \quad (15)$$

Совокупность взаимно изогональных сетей, имеющих общую главную сеть, называется *пучком сетей*. Тензор всякой сети пучка определяется через тензор двух различных сетей того же пучка по формуле

$$c_{ij} = a_{ij} + cb_{ij}, \quad (16)$$

где при условии нормирования (14) c не зависит от точки.

§ 94. Индикатриса сети

Предполагая, что сеть задана в пространстве аффинной связности без кручения A_2 , развернем некоторую произвольную линию L_A этого пространства на линию L_R аффинной плоскости R_2 .

Заданная сеть определяет в каждой точке линии L_A некоторую инволюцию направлений, и после отображения мы получим последовательность инволюций в точках M кривой L_R плоскости R_2 .

Рассмотрим две точки последней кривой M и M' и построим прямую γ' , на которой обе инволюции направлений M и M' определяют перспективно одну и ту же точечную инволюцию. Такая прямая определится однозначно и будет действительной, если только одно из двойных направлений в M и M' не совпадает с направлением MM' *).

Предположим теперь, что точка M' неограниченно приближается к точке M по кривой L_R ; тогда прямая γ' будет стремиться занять некоторое предельное положение γ , в котором мы назовем ее *характеристической прямой* последовательности инволюций a_{ij} в точке M .

Перейдем к аналитическому определению прямой γ . Для этого примем за координатные линии (мнимые или действительные) линии сети α и β , развернув кривую L_A на евклидову плоскость, введем в каждой ее точке M

*) С точки зрения проективной геометрии комплексного пространства прямая γ' всегда соединяет точки пересечения двойных прямых α и α' , β и β' инволюций a_{ij} и a'_{ij} . Прямые α и β , α' и β' могут быть комплексно сопряженными, равно как и точки их пересечения $(\alpha\alpha')$ и $(\beta\beta')$, но прямая, соединяющая эти точки, будет все же действительной.

декартову систему координат с началом в этой точке и с координатными векторами r_1 и r_2 , которые получим при интегрировании системы

$$dr_i = G_{ij}^k r_k du^j, \quad (*)$$

определяющей развертывание L_A в L_R .

Для точек A, B пересечения прямых направлений сети в точках M и M' будем иметь координаты

$$\begin{aligned} x^1 &= \lambda^1, & x^2 &= 0; \\ x^1 &= 0, & x^2 &= \lambda^2. \end{aligned}$$

Для первой из этих точек получим

$$\lambda^1 r_1 = dr + d(\lambda^1 r_1),$$

или, если сравнить коэффициенты при r_1 и использовать систему (*), будем иметь

$$du^2 + \lambda^1 G_{1k}^2 du^k = 0,$$

откуда, вводя угловой коэффициент направления линии

$$k = \frac{du^2}{du^1},$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \lambda^1 &= -(G_{11}^2 k^{-1} + G_{12}^2)^{-1} \\ \lambda^2 &= -(G_{12}^1 k + G_{21}^1)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и, аналогично,

Записав уравнение характеристической прямой в виде

$$h_1 x^1 + h_2 x^2 = 1,$$

введя обозначения

$$G_{11}^2 = \beta, \quad G_{22}^1 = \gamma, \quad G_{12}^2 = -t_1, \quad G_{21}^1 = -t_2 \quad (2)$$

и приняв во внимание, что искомая прямая проходит через точки A, B , находим, что

$$h_1 = t_1 - \beta k^{-1}, \quad h_2 = t_2 - \gamma k. \quad (3)$$

Согласно (3) положение характеристической прямой зависит только от направления касательной и кривой L_A , в точках которой сеть определяет последовательность инволюций.

Если $\beta\gamma \neq 0$, то k можно исключить из системы (2), получив уравнение

$$(h_1 - t_1)(h_2 - t_2) = \beta\gamma, \quad (4)$$

где h_i — переменные, а все остальные величины постоянны в точке M .

Так как h_i — тангенциальные координаты характеристической прямой, то *огibaющая семейства характеристических прямых есть кривая второго класса*. Мы будем называть эту кривую *индикатрисой сети*.

Чтобы исследовать индикатрису, перейдем к однородным координатам, полагая

$$h_i = \frac{\xi_i}{\xi}.$$

Заметим, что обращение в нуль ξ характеризует прямые, проходящие через точку M . В частности, прямые, касающиеся линий сети $u^1 = \text{const}$ и $u^2 = \text{const}$, имеют координаты $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$. Подставляя их в однородное уравнение индикатрисы

$$(\xi_1 - t_1\xi)(\xi_2 - t_2\xi) = \beta\gamma\xi,$$

мы убеждаемся, что *индикатриса касается обеих касательных к линиям сети*.

Найдем теперь полярную точку M относительно индикатрисы, назвав ее *главной полярной сетью*. Для этого запишем уравнение (4) в полярной форме:

$$(\xi_1^* - t_1^*\xi)(\xi_1 - t_1\xi) + (\xi_2^* - t_2^*\xi)(\xi_2 - t_2\xi) = 2\beta\gamma\xi\xi^*. \quad (5)$$

Так как для всех прямых, проходящих через точку M , $\xi = 0$, то это равенство должно вытекать из последнего уравнения при подстановке координат искомой полярной. Поэтому координатами главной полярной будут

$$\frac{\xi_1^*}{\xi^*} = t_1, \quad \frac{\xi_2^*}{\xi^*} = t_2, \quad (6)$$

а ее уравнение в декартовых координатах —

$$t_1x^1 + t_2x^2 = 1. \quad (7)$$

В случае действительных линий сети можно дать весьма простой способ построения главной полярной.

Рассмотрим точку пересечения касательных к линиям сети, принадлежащим семейству $u^2 = \text{const}$, в точках M и $M' = M + dM$ линии $u^1 = \text{const}$ другого семейства. Согласно (1) координаты этой точки суть

$$x^1 = -\frac{1}{G_{12}^2} = \frac{1}{t_1}, \quad x^2 = 0,$$

и, аналогично, для точки пересечения касательных к линиям $u^1 = \text{const}$ в точках линии $u^2 = \text{const}$

$$x^1 = 0, \quad x^2 = -\frac{1}{G_{21}^1} = \frac{1}{t_2}.$$

Следовательно, предельное положение прямой, соединяющей точки пересечения бесконечно близких касательных к линиям сети одного семейства, построенным вдоль линии другого семейства, имеет уравнение

$$t_1 x^1 + t_2 x^2 = 1,$$

т. е. совпадает с главной полярной сети.

§ 95. Специальные сети A_2

1. Полугеодезические сети. В предыдущем параграфе мы оставили без рассмотрения случай $\beta\gamma = 0$. Предположим, что только один из этих множителей

$$\beta = G_{11}^2 = 0 \tag{1}$$

вдоль линии $u^2 = \text{const}$.

Тогда при разворачивании этой линии на плоскость

$$\partial_1 r_1 = G_{11}^1 r_1,$$

откуда следует, что эта линия прямая и, значит, до разворачивания была геодезической.

Будем называть сеть, одно из семейств линий которой состоит из геодезических, *полугеодезической*. Для характеристических прямых такой сети уравнения (94,2) сведутся к одному:

$$h_1 = t_1.$$

Так как h_1 оказывается не зависящим от углового коэффициента, то все характеристические прямые проходят через

одну точку $(1/t_1, 0)$, лежащую на прямой, отображающей геодезическую линию сети, и на прямой $t_1x^1 + t_2x^2 = 1$, которую мы по-прежнему будем называть главной полярой сети.

Итак, *индикатриса полугеодезической сети вырождается, обращаясь в пучок прямых с центром на прямой, отображающей геодезическую линию сети.*

2. **Геодезические сети.** Если оба семейства линий сети состоят из геодезических линий, то сеть называется *геодезической*.

В системе координат, линии которой совпадают с линиями геодезической сети, она характеризуется условием

$$\beta = G_{11}^2 = 0, \quad \gamma = G_{22}^1 = 0. \quad (2)$$

Координаты ее характеристической прямой суть

$$h_i = t_i.$$

Итак, *характеристическая прямая геодезической сети не зависит от направления линии L_A и совпадает с главной полярой сети.*

Если линии геодезической сети мнимы, то приведенное свойство можно считать за геометрическую характеристику соответствующего поля инволюций.

3. **Чебышевские сети.** Сеть называется *чебышевской*, если направление касательной к линиям каждого из ее семейств переносится параллельно вдоль линий другого семейства *).

В случае чебышевской сети при смещении касательной к линиям одного семейства вдоль другого они должны оставаться параллельными своему первоначальному положению, т. е. пересекаться на несобственной прямой. Поэтому главная поляра сети должна совпадать с несобственной прямой. Иными словами, *чебышевская сеть характеризуется тем, что центр ее индикатрисы совпадает с точкой M .*

В случае мнимых линий сети это свойство является геометрической характеристикой чебышевской сети.

*) Понятие этих сетей было введено Чебышевым на основе метрических соображений. Свойство, положенное нами в основу определения этих сетей, было установлено Бианки для метрического случая и принято нами за определение чебышевской сети в неметрическом случае.

Аналитически чебышевская сеть, принятая за координатную, характеризуется условием

$$t_1 = -G_{12}^2 = 0, \quad t_2 = -G_{21}^1 = 0. \quad (3)$$

4. **П а р а б о л и ч е с к и е с е т и.** Трансверсалью поля направлений v^i в A_2 называется такая линия, вдоль которой направление этого поля переносится параллельно. Условие такого переноса имеет вид

$$\delta v^i = \lambda v^i,$$

или

$$v_i \nabla_k v^i du^k = 0, \quad (4)$$

т. е. представляет собой линейное уравнение первого порядка. Таким образом, *всякое поле направлений допускает существование семейства трансверсалей, зависящего от одного параметра так, что через каждую неособую точку поля проходит одна и только одна действительная трансверсаль.*

Если алгебраическое уравнение (4) имеет более одного решения du^1/du^2 , то оно удовлетворяется тождественно,

$$\nabla_k v^i = \lambda_k v^i,$$

и направления поля абсолютно параллельны между собою. Таким образом, *если поле допускает существование более чем одного семейства трансверсалей, то это поле абсолютно параллельных направлений.*

Рассмотрим теперь такую сеть, поля направлений которой имеют общее семейство трансверсалей. Развернув одну из этих трансверсалей на плоскость и сдвигая вдоль нее направления сети, мы видим, что соответствующие прямые останутся параллельными своим первоначальным положениям, т. е. пересекутся в бесконечности, а это значит, что характеристическая прямая, соответствующая смещению по трансверсали, будет несобственной, а *индикатриса сети будет параболой, касающейся этой прямой.*

Последнее свойство характеризует сеть с общими трансверсалью направлений и в том случае, когда эти направления мнимы; мы будем называть такие сети *параболическими*.

Приняв во внимание сохранение ангармонического отношения четырех направлений при их параллельном переносе по одной линии, можно утверждать, что угол двух направлений относительно параболической сети сохра-

няется при параллельном переносе вдоль трансверсали этой сети. Сформулируем также обратную теорему в форме, которая будет нам полезна в дальнейшем.

Если существует хотя бы одно значение угла $\varphi_0 \neq 0$ относительно сети, которое сохраняется при параллельном переносе любого образующего ее направления по некоторой линии, то эта линия является трансверсалью сети; если же линии, обладающие этим свойством, образуют семейство, то сеть — параболическая.

Для доказательства рассмотрим две точки M и N линии L_A ; пусть направления сети в каждой из этих точек отвечают несобственные точки M_1, M_2 и N_1, N_2 соответственно. Двум направлениям, переносимся параллельно, будут отвечать неподвижные несобственные точки x, y , а так как угол относительно сети сохраняется, то ангармоническое отношение

$$(M_1 M_2 xy) = (N_1 N_2 xy) = \alpha.$$

Обе зависимости между точками x и y , из которых одна (например, x) может быть выбрана произвольно, определяют на несобственной прямой совпадающие проективитеты; двойные элементы этих проективитетов тоже должны совпадать, поэтому $M_1 \equiv N_1, M_2 \equiv N_2$, а это показывает, что направления сети переносятся параллельно вдоль кривой L_A .

5. **Д е к а р т о в ы с е т и.** *Декартовой* мы будем называть такую сеть, которая является геодезической и чебышевской одновременно. Характеристическая прямая декартовой сети не зависит от направления и, совпадая с главной полярой, будет несобственной прямой плоскости. Декартова сеть, будучи принята за координатную, характеризуется условиями

$$G_{22}^1 = G_{11}^2 = G_{12}^1 = G_{21}^2 = 0. \quad (5)$$

Так как каждое семейство линий декартовой сети является семейством трансверсалей для любого поля ее направлений, то каждое такое поле есть поле абсолютно параллельных направлений. Итак, *направления декартовой сети образуют два поля абсолютно параллельных направлений.* Но вследствие этого всякая линия X_2 является трансверсалью этой сети, и, следовательно, декартова сеть — параболическая сеть с неопределенной трансверсалью. Поэтому

1. Угол между двумя направлениями относительно декартовой сети сохраняется при параллельном перенесении этих направлений по любому пути.

2. Если некоторое значение угла $\varphi_0 \neq 0$ относительно сети, образуемого любыми направлениями, сохраняется при параллельном переносе этих направлений по любому пути, то сеть декартова.

В § 89 мы видели, что существование двух полей абсолютно параллельных направлений характеризует геометрию Вейля. Таким образом, и существование декартовой сети характеризует геометрию Вейля, где эта сеть может быть принята за изотропную.

Геометрия, допускающая существование двух различных декартовых сетей, очевидно, допускает существование по крайней мере трех полей абсолютно параллельных направлений и является квазиевклидовой.

Так как поля абсолютно параллельных направлений в квазиевклидовой геометрии могут комбинироваться попарно ∞^2 способами, то эта геометрия допускает существование ∞^2 декартовых сетей.

Рассматривая две такие сети Σ и Σ' и принимая во внимание, что их направления переносятся параллельно по любому пути, а при этом угол должен сохраняться, мы видим, что любые две декартовы сети взаимно изогональны.

Предположим, что некоторая чебышевская (или геодезическая) сеть Σ' изогональна относительно декартовой сети Σ . Так как одно из направлений сети Σ' переносится параллельно вдоль линии этой сети, а другое образует с ним постоянный угол, то оба направления переносятся параллельно вдоль обеих линий этой сети, и сеть декартова.

Итак, если для некоторой сети пространства W_2 верны два из трех положений: а) сеть геодезическая, б) сеть чебышевская, с) сеть изогональная, то верны все три и сеть будет декартовой; если же эта сеть не совпадает с изотропной, то связность W_2 будет квазиевклидовой.

§ 96. Сопряженные связности в X_2

Задание пары сопряженных перенесений (G, Γ) в X_2 предполагает задание сети

$$b_{ij} du^i du^j = 0, \quad (1)$$

или *базиса пары*, причем сопряженность двух направлений относительно этой сети сохраняется, если каждое из этих направлений переносится параллельно в связностях G и Γ соответственно.

Аналитически эта зависимость выражается двумя условиями:

$$\nabla_k b_{i(j)} = 2\omega_k b_{ij} \quad (2)$$

и

$$t_{ki}^k = t_{ik}^k, \quad (3)$$

где

$$t_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - G_{jk}^i. \quad (4)$$

Второе условие при $n = 2$ равносильно условию

$$t_{[jk]}^i = 0, \quad (5)$$

вследствие чего в X_2 *связность, сопряженная связности без кручения, тоже не имеет кручения*, что следует также и из того факта, что всякая связность A_2 является полусимметрической.

Таким образом, тензор всякой сети удовлетворяет уравнению (51,2):

$$\nabla_{[k} b_{j]i} = 2\omega_{[k} b_{j]i}, \quad (6)$$

и всякая сеть может служить базисом пары связностей без кручения.

Согласно (50,13) тензор

$$t_{kj}^s = \tilde{b}^{pq} \{ \delta_p^s \nabla_k b_{qj} - 2 \nabla_{[k} b_{q]p} \delta_j^s \} \quad (7)$$

не зависит от нормирования тензора сети, равно как и *чебышевский тензор сети*

$$t_i = \frac{1}{4} t_{ki}^k = \frac{1}{2} \tilde{b}^{pq} \left(\nabla_p b_{qi} - \frac{1}{2} \nabla_i b_{pq} \right). \quad (8)$$

При разворачивании некоторой линии L_A на плоскость всякий ковариантный вектор a_i определяет прямую линию, заданную уравнением $a_i x^i = 1$.

Чтобы найти прямую, соответствующую t_i , примем сеть за координатную, т. е. предположим, что

$$b_{11} = b_{22} = 0. \quad (9)$$

В таком случае

$$t_1 = -G_{21}^2, \quad t_2 = -G_{12}^1. \quad (10)$$

Но согласно (94,2) и (94,6) прямая, определяемая величинами $-G_{12}^i$, характеристическая. Итак, при разворачивании линии L_A на плоскость чебышевский вектор сети определяет характеристическую прямую этой сети.

Будем, как и в общем случае, рассматривать тензор

$$B_{.ij}^k = t_{.ij}^k - (\delta_{.i}^k t_j + \delta_j^k t_{.i} + b_{ij} \tilde{b}^{km} t_m), \quad (11)$$

инвариантный при составном преобразовании пары (52,8).

Условие

$$B_{.ki}^k = 0 \quad (12)$$

показывает, что тензор B_{ijk} симметричен по всем своим индексам.

Мы будем называть интегральные линии уравнения

$$B_{ijk} du^i du^j du^k = 0 \quad (13)$$

и направления этих линий *линиями и направлениями Сегре пары перенесений*.

Аналогично, будем называть линии и направления, определяемые уравнением

$$D_{ijk} du^i du^j du^k = 0, \quad (14)$$

где

$$D_{ijk} = b_{km} B_{.ij}^m, \quad (15)$$

линиями и направлениями Дарбу. Согласно (21,7)

$$D_{ijk} = -\sigma b_{ip} b_{jq} b_{kr} B_{.pqr}, \quad (16)$$

откуда следует, что *направления Дарбу сопряжены направлениям Сегре относительно базиса пары*.

Условия аполярности

$$b^{ij} B_{kij} = 0, \quad b^{ij} D_{kij} = 0 \quad (17)$$

показывают, что *направления Дарбу и направления Сегре образуют тройки, которые аполярны направлениям базиса*.

Направление базиса определяется заданием аполярной тройки направлений. Вследствие этого, если мы установим между направлениями, выходящими из двух точек X_2 , такое проективное соответствие, при котором направления Сегре, например, соответствуют, то и направления базиса, и направления Дарбу тоже будут соответствовать,

а это значит, что *ангармоническое отношение* двух сопряженных сетей, образованных парами соответствующих семейств Сегре и Дарбу, не зависит от точки. Иными словами, три сопряженные сети, образованные соответствующими семействами Дарбу и Сегре, принадлежат одному пучку, базисом которого является базис пары.

Если базисная сеть принята за координатную, то вследствие условия аполярности $b^{12}B_{12i} = 0$ и

$$B_{.21}^2 = B_{.22}^2 = B_{.11}^1 = B_{.12}^1 = 0. \quad (18)$$

Остается определить две компоненты, которыми, согласно (10), будут

$$B_{.11}^2 = t_{11}^2, \quad B_{.22}^1 = t_{22}^1.$$

Но

$$\Gamma_{11}^2 + G_{11}^2 = 2\mathcal{C}_{11}^2, \quad \Gamma_{22}^1 + G_{22}^1 = 2\mathcal{C}_{22}^1,$$

где $\mathcal{C}_{jk}^i$ — коэффициенты средней связности. Однако это есть связность Вейля, для которой базисная сеть изотропная, т. е. декартова, и вследствие (95,5) $\mathcal{C}_{11}^2 = \mathcal{C}_{22}^1 = 0$. Таким образом,

$$B_{.11}^2 = -2\beta = -2G_{11}^2, \quad B_{.22}^1 = -2\gamma = -2G_{22}^1. \quad (18')$$

§ 97. Некоторые свойства линий и сетей по отношению к паре связностей

Будем искать такое направление v^i , которое переносится параллельно в бесконечно близкую точку X_2 одновременно в обоих перенесениях сопряженной пары, т. е. удовлетворяет одновременно двум условиям:

$$\begin{aligned} \delta v^{(i)} &= dv^i - \Gamma_{km}^i v^k w^m dt = \lambda v^i, \\ \delta v^i &= dv^i - G_{km}^i v^k w^m dt = \mu v^i, \end{aligned}$$

где $w^m dt$ — вектор смещения. В этом случае

$$t_{ikm} v^i w^k v^m = 0.$$

Если направление смещения совпадает с переносимым направлением, то вектор v^i удовлетворяет условию

$$t_{ijk} v^i v^j v^k = 0 \quad (1)$$

и определяет направление, которое мы назовем *направлением t пары*; кривую, огибающую это направление, мы будем называть также *t -линией*.

Двойная геодезическая, т. е. такая линия, которая является геодезической по отношению к обеим связностям пары, очевидно, должна быть интегральной кривой уравнения

$$t_{ijk}du^idu^jdu^k = 0, \quad (2)$$

т. е. является *t -линией*.

Более общие результаты мы получим, сравнив условия, характеризующие

- | | |
|--|-------|
| 1) параллельный перенос первого рода: $\delta v^i = \lambda v^i$, | } (3) |
| 2) параллельный перенос второго рода: $\delta v^{(i)} = \mu v^i$, | |
| 3) параллельный перенос средней связности: | |
| $\delta v^i + \delta v^{(i)} = \nu v^i$, | |
| 4) касательный вектор t -линии: | |
| $\delta v^{(i)} - \delta v^i = \sigma v_i$. | |

Каждое из этих условий является следствием двух других, и, предполагая, что направление дифференцирования совпадает с v^i , мы приходим к следующей теореме:

1. Если для некоторой линии выполнены два из следующих четырех условий: а) она геодезическая первого рода, б) она геодезическая второго рода, с) она геодезическая средней связности, в) она t -линия, то выполнены и все четыре.

Линии базиса образуют декартову сеть средней вейлевой связности и вследствие этого являются геодезическими этой связности. Поэтому из предыдущей теоремы следует, что если для линии базиса выполнено одно из следующих трех условий:

- 1) она геодезическая первого рода,
 - 2) она геодезическая второго рода,
 - 3) она есть линия t ,
- то выполнены и все три.

Сравнив первые три условия (3) и предполагая, что v^i есть одно из направлений некоторой сети, а направление дифференцирования совпадает с направлением ее другой линии, мы также будем иметь, что *любая сеть, являющаяся*

чебышевской по отношению к двум из трех связностей: $G, \Gamma, \mathcal{G}$, является чебышевской и по отношению к третьей.

Декартова сеть является одновременно и чебышевской, и геодезической; следовательно, будучи таковой по отношению к двум из указанных связностей, она будет такой же и по отношению к третьей.

Рассмотрим, наконец, сеть, аполярную относительно базиса, которую в дальнейшем мы будем называть *сопряженной*, говоря о паре сопряженных связностей. Предположим, что она чебышевская (геодезическая) по отношению к одному из перенесений пары; в таком случае вектор ее направления будет переноситься параллельно по линиям другого (того же) направления, а сопряженный ему вектор данного (другого) направления переносится параллельно во втором перенесении пары. Вследствие этого *сопряженная сеть, чебышевская (геодезическая) по отношению к одному из двух перенесений пары, будет геодезической (чебышевской) по отношению к другому перенесению этой пары.*

В классической теории поверхностей геометрия второго рода совпадает с геометрией сферического отображения, а базисом пары является асимптотическая сеть. Принимая это во внимание и применяя предыдущие результаты, мы приходим к следующим теоремам:

2. *Сферическое отображение асимптотически-геодезической сети (сети прямолинейных образующих) поверхности есть сеть, составленная из больших кругов на сфере.*

3. *Сферическое отображение асимптотически-чебышевской сети (асимптотической сети) поверхности постоянной гауссовой кривизны *) есть чебышевская сеть на сфере.*

4. *Сферическое отображение сопряженной чебышевской сети (сети переноса) есть сеть, составленная из больших кругов сферы.*

5. *Сферическое отображение сопряженной геодезической сети (сети Фосса) есть чебышевская сеть на сфере.*

§ 98. Специальные пары связностей в X_2

Все типы специальных пар сопряженных перенесений, рассмотренных нами в § 53, возможны и в X_2 , однако многие из них обладают особыми свойствами, которые и будут

*) См. § 98, пункт 8.

рассмотрены в этом параграфе наряду с некоторыми дополнительными случаями.

1. К о д а ц ц и е в а п а р а будет таковой, если ее основной тензор удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{[k} b_{j]i} = 0; \quad (1)$$

в таком случае и базисная сеть называется *сетью Кодацци*. Средняя метрика кодацциевой пары риманова.

2. Э к в и а ф ф и н н а я п а р а состоит из двух эквиваффинных связностей и является частным видом пары Кодацци, а ее чебышевский вектор равен

$$t_i = \partial_i \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad (2)$$

где σ_1 и σ_2 — соответствующие элементы площади первого и второго родов. Эти элементы связаны с элементами средней метрики соотношением

$$\sigma_1 \sigma_2 = \sigma^2. \quad (3)$$

3. Ч е б ы ш е в с к а я п а р а характеризуется обращением в нуль чебышевского вектора базисной сети:

$$t_i = 0^*), \quad (4)$$

а так как этот вектор определяет главную поляру сети, то эта сеть будет чебышевской в смысле § 95. Чебышевская сеть характеризуется также равенством

$$t_{ij}^h = B_{.ij}^h, \quad (5)$$

вследствие которого линии t чебышевской сети совпадают с линиями Сегре.

4. Э к в и а ф ф и н н а я ч е б ы ш е в с к а я п а р а характеризуется равенством

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \text{const}, \quad (6)$$

т. е. тем, что площади первого и второго родов любой области отличаются только на постоянный множитель.

5. П о л у г е о д е з и ч е с к а я и г е о д е з и ч е с к а я п а р ы характеризуются тем, что одно или оба семейства базиса состоят из геодезических линий одной

*) Признак (4) был получен Я. С. Дубновым для чебышевских сетей V_2 . Он же дал вектору t_i название чебышевского.

из связностей пары. Вследствие теоремы § 97 они будут тогда геодезическими и по отношению ко второй связности, средней метрике и линиями t .

Так как, кроме того,

$$B_{ijk} = t_{ijk} - (\varepsilon_{ki}t_j + \varepsilon_{kj}t_i + b_{ij}b_k^m t_m),$$

то для линии базиса

$$B_{ijk} du^i du^j du^k = t_{ijk} du^i du^j du^k, \quad (7)$$

и линия базиса будет геодезической тогда и только тогда, когда она является вместе с тем линией Сегре. В силу свойств аполярных троек это может иметь место тогда и только тогда, когда семь семейств: три семейства Сегре, три семейства Дарбу и семейство базиса — совпадают. Отсюда же следует, что полугеодезическая пара в X_2 характеризуется условием

$$I = \frac{1}{2} \tilde{b}^{pq} B_{.np}^m B_{.mq}^n = 0, \quad (8)$$

а геодезическая — условием

$$B_{.jk}^i = 0, \quad (9)$$

что было установлено также в пункте 6 § 53.

6. П а р а В е й л я образована сопряженными между собой связностями Вейля. Так как изотропные направления W_2 образуют два поля абсолютно параллельных направлений, то направления, сопряженные им, будут обладать этим же свойством по отношению к сопряженной связности. Вследствие этого последняя допускает существование декартовой сети и будет тоже связностью Вейля. Таким образом, мы снова доказали теорему: *связность, сопряженная W_2 , есть также W'_2* . Из приведенных рассуждений следует, кроме того, что *каждое из семейств изотропных линий W_2 образует сопряженную сеть с одним из семейств изотропных линий W'_2 , сопряженных данной*.

Установим связь между углами первого и второго родов, определенными относительно каждой из метрик вейлевой пары.

Рассмотрим два произвольных направления e_1, e_2 и два изотропных направления i_1 и i_2 метрики первого рода. Угол первого рода между этими направлениями

определится по формуле

$$\widehat{e_1 e_2} = c \ln (i_1 i_2 e_1 e_2).$$

Так как изотропные направления j_1 и j_2 второй метрики сопряжены направлениями i_1 и i_2 соответственно, то угол второго рода между направлениями m_1 и m_2 , сопряженными данным,

$$\widehat{m_1 m_2} = c' \ln (j_1 j_2 m_1 m_2)$$

будет отличаться от $e_1 e_2$ только постоянным множителем, так как ангармонические отношения равны:

$$(i_1 i_2 e_1 e_2) = (j_1 j_2 m_1 m_2).$$

Итак, в двух сопряженных метриках Вейля можно установить измерение углов так, что угол первого рода между двумя направлениями будет равен углу второго рода между направлениями, сопряженными данным относительно базиса пары.

Отсюда, в частности, следует, что углы между двумя сопряженными направлениями и углы между направлениями базиса могут считаться одинаковыми в обеих метриках.

7. **К о н ф о р м н а я п а р а** — это такая вейлева пара, базис которой является сетью, ортогональной по отношению к одной из метрик пары. Согласно последней теореме эта сеть будет ортогональной и относительно второй метрики. Очевидно также, что рассматриваемая пара характеризуется сопряженностью изотропных сетей обеих метрик относительно базиса. Однако изотропные направления различных метрик сами должны быть сопряжены между собой, а в рассматриваемом случае это ведет к совпадению изотропных сетей обеих метрик, т. е. к их конформному соответствию между собою. Обратно, если такое соответствие имеет место для двух сопряженных метрик вейлевой пары, то в силу той же сопряженности между изотропными направлениями различных метрик они должны определять сеть, сопряженную относительно базиса, который в силу этого должен быть ортогональной сетью. Итак, для того чтобы две сопряженные вейлевы связности составляли конформную пару, т. е. находились в конформном соответствии между собою, необходимо и достаточно, чтобы базис пары был ортогональной сетью одной (а следовательно, и другой) метрики.

Рассмотрим теперь, наряду с базисом B , ортогональную сеть B' , направления которой получим из направлений базиса поворотом на некоторый угол φ_0 , не зависящий от точки. Возьмем два направления l_1 и l_2 , сопряженные относительно B и, следовательно, симметричные относительно одного из направлений базиса b_2 . Таким же образом направление l'_1 , сопряженное l_1 , будет симметрично по отношению к направлению b'_2 базиса B' . Но так как b'_2 образует с b_2 угол φ_0 , то угол $\widehat{l_2 l'_2} = 2\varphi_0$ и не зависит от точки. Предположим, что направление l_2 переносится параллельно в связности второго рода. При этом направление l_1 переносится параллельно в перенесении первого рода в силу сопряженности, а направление l'_2 , образующее постоянный угол с l_2 , тоже переносится параллельно перенесением второго рода. Итак, два направления l_1 и l'_2 , сопряженные относительно сети B' , переносятся параллельно в связностях Γ и G соответственно, а следовательно, эти связности, сопряженные относительно базиса B , сопряжены также и относительно базиса B' , и мы приходим к следующей теореме: *если некоторая ортогональная сеть служит базисом пары сопряженных перенесений, то, повернув ее направления на любой угол, не зависящий от точки, мы получим направления другой ортогональной сети, которая тоже будет базисом данной пары. Иными словами, конформная пара допускает существование ∞^1 ортогональных базисов, направления которых образуют между собою углы, не зависящие от точки.*

Так как базис пары является изотропной сетью средней метрики, т. е. декартовой сетью, а конформная пара допускает существование ∞^1 таких сетей, то, следовательно (§ 95), *средняя связность конформной пары квазиевклидова.*

Различные базисы конформной сети определяют пары полей абсолютно параллельных направлений средней метрики и, следовательно, образуют между собою постоянные ангармонические отношения, вследствие чего все базисы пары, т. е. ортогональные сети, образованные поворотом направлений одной из них на постоянный угол, образуют пучок, базисом которого является общая изотропная сеть метрик первого и второго родов. Сама эта сеть, являясь двойной декартовой, является также и декартовой сетью

средней метрики (§ 97) и может быть принята за изотропную в этой метрике, что позволяет считать среднюю метрику конформной пары конформной обоим сопряженным метрикам этой пары.

Предположим теперь, что о некоторой паре сопряженных перенесений известно только, что она допускает существование двух различных базисов B и B' . Так как оба они являются декартовыми сетями средней метрики, то средняя метрика будет квазиевклидовой, а эти базисы взаимно изогональны. Рассмотрим главную сеть C пары B, B' . Если измерять углы относительно C , то сети B и B' следует считать изогональными, причем их направления образуют между собою угол φ_0 , не зависящий от точки вследствие постоянства ангармонического отношения направлений B и B' . Рассмотрим направление l_1 и два направления l_2 и l'_2 , сопряженные с l_1 относительно B и B' соответственно. Угол между ними $2\varphi_0$, как было показано выше, не зависит от точки. Но при параллельном перенесении первого рода направления l_2 и l'_2 переносятся параллельно в связности второго рода, образуя при этом постоянный угол относительно сети C . Так как это имеет место при перенесении по любой кривой, то сеть C будет параболической сетью с неопределенной трансверсалью, т. е. декартовой сетью связности второго рода (§ 95), а следовательно, — связностью Вейля. Базис B ортогонален по отношению к соответствующей метрике, а это значит, что пара конформна.

Итак, если некоторая пара сопряженных связностей допускает существование двух различных базисов, то она допускает существование целого пучка таких базисов и является конформной.

Из соотношения

$$t_{jk}^i = \delta_j^i p_k + \sigma g_j^i \tilde{p}_k,$$

которое должно иметь место для всякой конформной пары, свертывая, получим

$$p_i = 2t_i, \quad (10)$$

так что чебышевский вектор ортогональной сети W_2 равен половине вектора конформного преобразования, относящего данной связности ту, которая сопряжена с данной относительно этой сети.

Так как переход к средней метрике будет определяться тоже по формуле конформного преобразования, но с вектором $\frac{p_i}{2}$, а средняя связность квазиевклидова, то можно сформулировать также следующую теорему: *чебышевский вектор ортогональной сети W_2 равен вектору конформного преобразования, переводящего данную связность в квазиевклидову.*

Так как любой базис конформной пары относит данной связности G одну и ту же конформную ей связность Γ и формула (10) имеет место для любого базиса, то *все ортогональные сети одного пучка имеют одинаковые чебышевские векторы.* Обратно: если две ортогональные сети имеют общий чебышевский вектор, то они определяют при сопряжении одну и ту же связность, конформную данной, и, следовательно, являются базисами одной пары, т. е. принадлежат одному пучку. Итак, *совпадение чебышевских тензоров двух ортогональных сетей W_2 необходимо и достаточно для того, чтобы эти сети принадлежали одному пучку.*

8. Р и м а н о в а п а р а есть эквиаффинная пара Вейля, и для ее получения достаточно найти связность, сопряженную произвольной геометрии Римана двух измерений относительно некоторой кодацциевой сети.

Рассмотрим два вектора l_1 и l_2 сопряженных направлений относительно базиса римановой пары и будем обводить их параллельно, каждый в одной из связностей пары, по замкнутому контуру, ограничивающему некоторую область Σ . Возвратившись в начальную точку обвода, эти векторы примут значения l'_1 и l'_2 , причем сопряженность их направлений не нарушится и в силу свойств углов, изложенных в пункте 6 этого параграфа, для углов первого и второго рода будем иметь

$$\widehat{l_1 l'_1} = \widehat{l_2 l'_2}.$$

Но углы отклонения векторов при параллельном обводе равны интегральным кривизнам, и, следовательно, *интегральные кривизны любой области X_2 , вычисленные по отношению к двум сопряженным римановым связностям, равны между собою.*

Вводя k и κ — гауссовы кривизны обеих связностей и ds и $d\sigma$ — элементы их площадей, мы будем иметь

$$\iint_{\Sigma} k ds = \iint_{\Sigma} \kappa d\sigma \quad (11)$$

и, предположив, что контур, ограничивающий Σ , стягивается к точке, получим

$$\frac{k}{\kappa} = \lim \frac{d\sigma}{ds},$$

или, вследствие условия (2) для чебышевского тензора пары,

$$t_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln \frac{k}{\kappa}. \quad (12)$$

Если $\kappa = \text{const}$, что имеет место, например, для сферического отображения поверхностей евклидова пространства, то

$$t_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln k, \quad (13)$$

и, таким образом, чебышевский вектор асимптотической сети поверхности трехмерного евклидова пространства равен одной четвертой логарифмической производной гауссовой кривизны.

В частности, отсюда следует, что поверхность постоянной гауссовой кривизны E_3 характеризуется тем, что ее асимптотическая сеть чебышевская.

9. К в а з и е в к л и д о в ы и е в к л и д о в ы п а р ы. Всякому полю абсолютно параллельных направлений в таких связностях будет соответствовать поле направлений, сопряженных данным относительно любой сети, причем эти последние тоже будут абсолютно параллельными в связности, сопряженной данной, относительно той же сети. Так как квазиевклидова связность характеризуется существованием ∞^1 полей абсолютно параллельных направлений, то связность, сопряженная данной (квазиевклидовой относительно любой сети), будет тоже квазиевклидовой, причем каждому полю абсолютно параллельных направлений одной связности будет соответствовать такое же поле второй геометрии и направления обоих полей сопряжены между собою.

Евклидовой связности, вообще говоря, будет сопряжена квазиевклидова связность, которая в свою очередь станет евклидовой, если базис будет кодацциевой сетью.

10. Самосопряженная пара, как мы это уже видели выше, есть вейлева пара, базис которой совпадает с ее изотропной сетью, вследствие чего обе связности совпадают между собою и со средней связностью.

Так как базис самосопряженной пары есть декартова сеть, то она является одновременно и чебышевской, и геодезической.

Самосопряженная пара может быть конформной, если она допускает существование различных базисов, т. е. различных декартовых сетей. В этом случае пара является квазиевклидовой.

§ 99. Сети в W_2

Переходя к специальному рассмотрению сетей в W_2 , согласимся перебрасывать индексы с помощью дискриминантного бивектора ε_{ij} основного тензора метрики. Мы будем предполагать, кроме того, что метрика является эллиптической, хотя это условие и не является особенно существенным.

Для тензора любой сети a_{ij} мы будем иметь, согласно (7,19), следующее соотношение, характеризующее тензор, обратный a_{ij} :

$$a^{ij} = \frac{1}{2} a^{pq} a_{pq} \tilde{a}^{ij} = A \tilde{a}^{ij}, \quad (1)$$

откуда

$$a_k^j a_i^h = -a_{ik} a^{jh} = -A \delta_i^j. \quad (2)$$

Действительный или мнимый угол между направлениями сети определится по формуле (93,11), так что

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi = - \frac{(g^{ij} a_{ij})^2}{a^{pq} g_{pq} g^{mn} a_{mn}} = - \frac{(g^{ij} a_{ij})^2}{4A},$$

или

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{2} \frac{g^{ij} a_{ij}}{\sqrt{-A}}. \quad (3)$$

Главная сеть сетей a_{ij} и g_{ij} есть *биссекторная сеть* для a_{ij} , так как она ортогональна и разделяется гармонически данной сетью. Тензор биссекторной сети c_{ij} можно определить согласно (93,13) так, чтобы

$$c_{ij} = \lambda g_{.i}^k a_{jk}. \quad (4)$$

Биссекторная сеть всегда действительна, т. е. определяет гиперболическую инволюцию, сводящуюся к симметрии относительно одного из ее направлений, и вследствие этого ее тензор может быть пронормирован так, чтобы выполнялись условия

$$c_i^k c_k^j = \delta_i^j. \quad (5)$$

Для биссекторной сети мы можем в свою очередь построить биссекторную сеть (вторая биссекторная сеть a_{ij}), определив ее тензор условиями

$$\tilde{c}_{ij} = g_{.i}^k c_{jk}. \quad (6)$$

Симметрия правой части следует из того, что сеть ортогональна и

$$g^{ij} \tilde{c}_{ij} = 0, \quad (7)$$

откуда

$$\tilde{c}_{ik} \tilde{c}_{.j}^k = -c_{ip} g_{.k}^p g_{.q}^k c_{.j}^q = c_{ip} c_{.j}^p,$$

или

$$\tilde{c}_k^i \tilde{c}_j^k = \delta_j^i. \quad (8)$$

Тензоры c_{ij} , c_{ij} и g_{ij} независимы, так как

$$c_i^j g_j^k c_k^i = \tilde{c}_i^j \tilde{c}_j^i = 2,$$

вследствие чего тензор всякой сети может быть представлен в виде их линейной комбинации. Имея это в виду, вычислим коэффициенты разложения

$$a_{ij} = \lambda c_{ij} + \mu \tilde{c}_{ij} + \nu g_{ij}.$$

Согласно условиям аполяльности $c^{ij}a_{ij} = \tilde{c}^{ij}c_{ij} = 0$ и $\lambda = 0$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} a^{ij}a_{ij} &= (\mu\tilde{c}^{ij} + \nu g^{ij})(\mu\tilde{c}_{ij} + \nu g_{ij}) = \\ &= -2\mu^2 + 2\nu^2 = A\tilde{a}^{ij}a_{ij} = 2A, \\ g^{ij}a_{ij} &= 2\nu = 2\sqrt{-A} \operatorname{ctg} \varphi, \end{aligned}$$

откуда

$$\mu^2 = -A(1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi) = -\frac{A}{\sin^2 \varphi},$$

и окончательно:

$$a_{ij} = \frac{\sqrt{-A}}{\sin \varphi} (\tilde{c}_{ij} + \cos \varphi g_{ij}). \quad (9)$$

В дальнейшем мы будем считать, что тензор сети пронормирован так, чтобы выполнялось условие

$$\sqrt{-A} = \sin \varphi, \quad (10)$$

и поэтому

$$a_{ij} = \tilde{c}_{ij} + \cos \varphi g_{ij}, \quad (11)$$

$$a^{ij} = -\sin^2 \varphi \tilde{a}^{ij}. \quad (12)$$

§ 100. Конформно-чебышевский и геодезический вектор сети

Рассмотрим ортогональную сеть c_{ij} и примем ее за базис пары связностей Γ_1 и Γ_2 . Согласно пункту 7 § 98 эта пара будет конформной, а ее средняя связность будет квазиевклидовой, причем по отношению к этой средней связности сеть c_{ij} будет декартовой и, следовательно, ее тензор будет удовлетворять уравнению

$$\overset{c}{\nabla}_k c_{ij} = 2' \omega_k c_{ij}.$$

Предположим теперь, что произведено нормирование так, что

$$c^{ij}c_{ij} = \text{const.} \quad (1)$$

Дифференцируя это соотношение и принимая во внимание соотношение

$$\overset{c}{\nabla}_k \varepsilon^{ij} = -2\overset{c}{\omega}_k \varepsilon^{ij},$$

где ε^{ij} — дискриминантный бивектор метрики Вейля, мы получим $\overset{c}{\omega}_k = \overset{c}{\omega}_k$, так что

$$\overset{c}{\nabla}_k c_{ij} = 2\overset{c}{\omega}_k c_{ij}.$$

При конформном преобразовании, характеризуемом формулой (91,1):

$$T_{ij}^k = \check{\Gamma}_{ij}^k - G_{ij}^k = p_i \delta_j^k + \sigma \tilde{p}_i g_j^k,$$

ковариантная производная тензора испытывает преобразование

$$\check{\nabla}_k c_{ij} = \nabla_k c_{ij} - 2p_k c_{ij} + 2\sigma \tilde{p}_k g_i^r c_{jr}. \quad (2)$$

Возвращаясь от средней связности к связности первого рода и вспоминая, что, согласно (98,10),

$$\overset{c}{\omega}_k = \omega_k - c_k,$$

где c_k — чебышевский тензор сети c_{ij} , мы получим следующее выражение ковариантной производной тензора ортогональной сети:

$$\nabla_k c_{ij} = 2\omega_k c_{ij} + 2\sigma c_k g_i^r c_{jr}. \quad (3)$$

Сравнение (2) и (3) дает правило преобразования чебышевского вектора ортогональной сети при конформном отображении (91,1):

$$\check{c}_i = c_i - p_i. \quad (4)$$

Если вектор m^i направлен по линии ортогональной сети, то $c_{ij} m^i m^j = 0$, и если $\nabla_k m^i = \lambda_k m^i + \mu^k \tilde{m}^i$, то, дифференцируя и используя (3), мы будем иметь

$$2\sigma c_k c_{ij} m^i \tilde{m}^j + 2\mu_k c_{ij} m^i \tilde{m}^j = 0.$$

Таким образом, для любого векторного поля

$$\nabla_k m^i = -\sigma c_k \tilde{m}^i + \lambda_k m^i, \quad (5)$$

где c_i есть чебышевский вектор сети, образованный линиями поля и их ортогональными траекториями.

Предположим теперь, что a_{ij} — любая сеть в W_2 с эллиптической метрикой, а c_{ij} — тензор ее биссекторной сети. В таком случае, согласно (99,11) и (3), ковариантная производная нормированного тензора сети будет иметь вид

$$\nabla_k a_{ij} = g_{.i}^r (2\omega_k c_{jr} + 2\tilde{c}_k g_{.r}^s c_{sj}) - (\varphi_k \sin \varphi - 2\omega_k \cos \varphi) g_{ij},$$

или

$$\nabla_k a_{ij} = 2\omega_k a_{ij} + 2\tilde{c}_k c_{ij} - \varphi_k g_{ij} \sin \varphi. \quad (6)$$

Это соотношение позволяет найти зависимость между чебышевскими векторами a_i и c_i сети a_{ij} и ее биссекторной сети c_{ij} . Согласно (96,8)

$$\begin{aligned} a_i &= \tilde{a}^{rs} c_{ri} \tilde{c}_s - \frac{1}{2} \sin \varphi \tilde{a}^{rs} \left(\varphi_r g_{si} - \frac{1}{2} \varphi_i g_{rs} \right) = \\ &= \tilde{a}^{rs} c_{ri} \tilde{c}_s - \frac{1}{2 \sin \varphi} (g^{rm} c_m^s + \cos \varphi g^{rs}) \left(\varphi_r g_{si} - \frac{1}{2} \varphi_i g_{rs} \right), \end{aligned}$$

или

$$a_i = \tilde{a}^{rs} c_{ri} \tilde{c}_s + \frac{1}{2} c_i^r \psi_r, \quad (7)$$

где

$$\psi_r = \partial_r \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \quad *). \quad (8)$$

Разрешая (7) относительно c_s , мы будем иметь

$$g_{.s}^m a_m^n c_n^i a_i = c_s + \frac{1}{2} g_{.s}^m a_m^n \psi_n,$$

но

$$g_{.s}^m a_m^n = g_{.s}^m (g_{.m}^r c_r^n + g_{.m}^n \cos \varphi) = -(c_s^n + \delta_s^n \cos \varphi),$$

а

$$g_{.s}^m a_m^n c_n^i = -(\delta_s^i + c_s^i \cos \varphi),$$

откуда

$$\chi_s = (\delta_s^i + c_s^i \cos \varphi) a_i = c_s + \frac{1}{2} (c_s^r + \delta_s^r \cos \varphi) \psi_r. \quad (9)$$

*) В. Ф. Каган называет вектор $\Omega_i = 2\psi_i$ градиентом сети.

Вектор χ_s обращается в нуль вместе с чебышевским вектором a_i , но обладает важной особенностью: при конформном отображении он преобразуется по простому закону

$$\check{\chi}_s = \chi_s - p_s, \quad (10)$$

что следует из (4), а также из того, что вектор

$$\pi_i = -(c_i^k + \delta_i^k \cos \varphi) \psi_k, \quad (11)$$

очевидно, остается инвариантным. Мы будем называть вектор χ_i *конформно-чебышевским вектором сети* *), приняв во внимание, что его обращение в нуль характеризует чебышевскую сеть.

Простой закон преобразования вектора χ_i позволяет сформулировать следующую теорему:

1. *Всякая связность W_2 может быть единственным образом преобразована конформно так, чтобы после этого конформного преобразования данная сеть стала чебышевской.*

Свойства вектора χ_i позволяют найти удобный признак геодезической сети, заданной в связности W_2 . Для того чтобы получить этот признак, перейдем к связности W_2' , сопряженной с W_2 по отношению к биссекторной сети. Так как преобразование будет конформным и вектор этого преобразования $p_i = 2c_i$, то, согласно (91,1), в связности W_2'

$$\chi_i' = \chi_i - 2c_i,$$

но, согласно результату § 97, данная сеть, которая сопряжена относительно базиса и является геодезической первого рода, будет чебышевской сетью по отношению к связности второго рода, так что

$$\chi_i - 2c_i = 0.$$

Таким образом, признак геодезической сети W_2 имеет вид

$$\chi_i = 2c_i.$$

Итак, обращение в нуль вектора

$$\Gamma_i = c_i + \frac{1}{2} \pi_i \quad (12)$$

*) Аналогичный вектор был введен Я. С. Дубновым для сетей V_2 и назван им «третьим чебышевским тензором».

характеризует геодезическую сеть W_2 , и мы будем называть этот вектор *геодезическим вектором сети*. Согласно (4) при конформном преобразовании вектор Γ_i преобразуется по закону

$$\check{\Gamma}_i = \Gamma_i - p_i. \quad (13)$$

Закон преобразования геодезического вектора позволяет сформулировать следующую теорему:

2. *Всякая связность W_2 может быть единственным способом преобразована конформно так, чтобы после этого преобразования данная сеть стала геодезической.*

Мы будем говорить, что связность G присоединена $\overset{a}{a}$ данной связности G на базе сети a_{ij} , если G получена $\overset{a}{a}$ таким конформным преобразованием данной, в результате которого сеть становится геодезической. Теорема 2 показывает, что *присоединенная связность определяется всегда и притом единственным образом.*

Величины

$$\overset{a}{K} = K - \operatorname{div} \Gamma, \quad \overset{a}{Q} = Q - \operatorname{rot} \Gamma \quad (14)$$

являются кривизной и растяжением присоединенной связности, а так как эта связность определяется однозначно, то они являются инвариантами всякого конформного преобразования связности, хотя и зависят от нормирования метрического тензора.

§ 101. Специальные сети в W_2

Переходя к рассмотрению специальных типов сетей в W_2 , отметим следующие случаи.

1. Сеть с декартовой биссекторной сетью характеризуется условием

$$c_i = 0 \quad (1)$$

или любым из условий

$$\chi_i = -\frac{1}{2} \pi_i, \quad (2)$$

$$\Gamma_i = \frac{1}{2} \pi_i. \quad (3)$$

Наконец, из формулы (100,7) имеем

$$a_i = \frac{1}{2} c_i^r \psi_r, \quad (4)$$

где

$$\psi_r = \partial_r \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

2. Геодезическая сеть характеризуется условием

$$\Gamma_i = 0 \quad (5)$$

или любым из условий

$$\chi_i = 2c_i, \quad (6)$$

$$\chi_i = -\pi_i, \quad (7)$$

$$c_i = -\frac{1}{2} \pi_i. \quad (8)$$

Наконец, из (100,9), (7) и (100,11) получаем

$$(\delta_s^i + c_s^i \cos \varphi) a_i = (c_s^r + \delta_s^r \cos \varphi) \psi_r = (\delta_s^i + c_s^i \cos \varphi) c_i^r \psi_r,$$

откуда следует, что приведенное условие равносильно также соотношению

$$a_i = c_i^r \psi_r. \quad (9)$$

3. Изогональная сеть характеризуется условием

$$\pi_i = 0$$

или любым из следующих равенств

$$\chi_i = c_i = \Gamma_i.$$

Присоединенная связность для изогональной сети будет квазиевклидовой, так как эта сеть, будучи изогональной и вместе с тем геодезической по отношению к этой связности, будет декартовой. Так как каждый из векторов χ_i , c_i и Γ_i совпадает с вектором конформного преобразования, переводящего данную связность в квазиевклидову, то, согласно формуле (92,4),

$$\overset{a}{K} = K - \operatorname{div} p = 0,$$

и, так как в данном случае $p_i = \chi_i$,

$$\operatorname{div} \chi = \operatorname{div} c = \operatorname{div} \Gamma = K. \quad (10)$$

Для ортогональных сетей, кроме того,

$$a_i = \chi_i = \Gamma_i = c_i$$

и, следовательно,

$$\operatorname{div} a = K, \quad (11)$$

или

$$\overset{a}{K} = 0.$$

4. **И з о т е р м и ч е с к а я с е т ь** — это такая ортогональная сеть W_2 , которая переходит в декартову сеть евклидовой связности при некотором конформном преобразовании связности данной W_2 . Но линейный элемент евклидовой связности, отнесенной к декартовой сети,

$$ds_0^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2,$$

вследствие чего основная форма W_2 , отнесенная к изотермической сети, имеет вид

$$ds^2 = \lambda^2 [(du^1)^2 + (du^2)^2],$$

а это значит, что *параметры вдоль линий изотермической сети можно выбрать так, чтобы они были изотермическими*, или, иными словами, *линии изотермической сети совпадают с линиями уровня двух сопряженных гармонических функций*.

Из определения изотермической сети следует, что связность, присоединенная к данной, на базе этой сети евклидова, а вектор преобразования, переводящего эту связность в евклидову, есть t_i — чебышевский вектор сети. В силу этого из формул (92,4) получим условия

$$\overset{a}{K} = K - \operatorname{div} t = 0, \quad \overset{a}{Q} = Q - \operatorname{div} t = 0 \quad (12)$$

или условие

$$R_{ij} = g_{ij} \operatorname{div} t + \varepsilon_{ij} \operatorname{rot} t, \quad (13)$$

характеризующее изотермическую сеть.

Если изотермическая сеть является вместе с тем чебышевской, т. е. декартовой (пункт 3), то, согласно (13),

$$R_{ij} = 0.$$

Итак, *существование декартовой изотермической сети характеризует евклидову связность*.

§ 102. Специальные сети в V_2

Перейдем теперь к рассмотрению сетей, заданных в пространстве Римана двух измерений. Напомним прежде всего, что конформное преобразование, переводящее риманову связность в риманову, совершается с помощью градиентного вектора. Будем называть такое преобразование *конформно-римановым*. Далее рассмотрим следующие случаи.

1. **К о н ф о р м н о - г е о д е з и ч е с к а я с е т ь** — это такая сеть, которая переходит в геодезическую при конформно-римановом преобразовании. Так как вектор этого преобразования есть геодезический вектор, то рассматриваемая сеть характеризуется градиентностью этого вектора, или условиями

$$\text{rot } \Gamma = 0. \quad (1)$$

2. **Ч е б ы ш е в с к а я с е т ь**. Если она принята за координатную, то, согласно (95,3),

$$G_{12}^1 = G_{12}^2 = 0,$$

но в таком случае из основного уравнения, характеризующего риманову связность:

$$\nabla_k g_{ij} = 0,$$

следует, что

$$\partial_2 g_{11} = 0, \quad \partial_1 g_{22} = 0,$$

а поэтому линейный элемент V_2 после надлежащего преобразования параметров принимает вид

$$ds^2 = (du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + (du^2)^2, \quad (2)$$

который показывает, что параметры вдоль линий чебышевской сети V_2 совпадают с длинами дуг этих линий.

3. **К о н ф о р м н о - ч е б ы ш е в с к а я с е т ь V_2** называется таковой, если она переходит в чебышевскую

при конформно-римановом преобразовании. Приняв ее за координатную, после преобразования можно привести линейный элемент V_2 к виду (2), а значит, до преобразования он имел вид

$$ds^2 = \lambda^2 [(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + (du^2)^2], \quad (3)$$

объясняющий нам, почему рассматриваемые сети называют также *ромбическими*.

Так как χ_i есть вектор конформного преобразования, переводящего сеть в чебышевскую, то градиентность конформно-чебышевского тензора, или условие

$$\text{rot } \chi = 0, \quad (4)$$

характеризует ромбическую сеть.

4. *Изотермическая сеть* V_2 есть ортогональная ромбическая сеть, а следовательно, она характеризуется градиентностью своего чебышевского вектора, т. е. условием

$$\text{rot } t = 0. \quad (5)$$

Иначе говоря, *изотермическая сеть есть ортогональная кодацциева сеть* (§ 53, пункт 2).

5. Чтобы сопоставить предыдущие случаи между собою, выпишем снова соотношения

$$\Gamma_i = \chi_i + \pi_i, \quad 2c_i = 2\chi_i + \pi_i.$$

Так как в выражении

$$\pi_i = -c_i^m \psi_m - \psi_i \cos \varphi$$

последнее слагаемое градиентно, то можно сформулировать следующую теорему: *для того чтобы все векторы Γ_i , χ_i , c_i , π_i и $c_i^m \psi_m$ были градиентны, необходима и достаточна градиентность двух из них. В частности, отсюда следует: если сеть обладает двумя из следующих четырех свойств: а) она конформно-геодезическая, б) она ромбическая, с) ее биссекторная сеть изотермическая, д) ее вектор $c_i^m \psi_m$ градиентен, то она обладает и двумя другими.*

6. *Геодезически-ромбическая сеть* характеризуется условиями

$$\Gamma_i = 0, \quad \chi_i = \text{grad}. \quad (6)$$

Однако в силу теоремы предыдущего пункта последнее требование можно заменить любым из следующих

трех:

$$\chi_i = -\pi_i = \text{grad}, \quad (7)$$

$$c_i = -\frac{1}{2} \pi_i = \text{grad}, \quad (8)$$

$$a_i = c_i^k \psi_k = \text{grad}. \quad (9)$$

Так как сеть рассматривается в пространстве V_2 , связность которого эквиаффинна, то последние два условия показывают, что рассматриваемая сеть и ее биссекторная сеть кодацциевы (§ 53, пункт 3), а значит, последняя является изотермической (пункт 4 данного параграфа), и мы приходим к теореме, принадлежащей Я. С. Дубнову:

Если для геодезической сети V_2 выполнено одно из трех условий: а) она ромбическая, б) ее биссекторная сеть изотермическая, с) она кодацциева, то выполнены и все три.

Условие (9) показывает, что чебышевский вектор имеет потенциал θ и

$$a_i = \partial_i \theta = c_i^r \psi_r, \quad (9')$$

а если мы рассмотрим гиперболическую метрику, определяемую тензором биссекторной сети c_{ij} , и сравним (9') с (90,9), то мы увидим, что функции $\psi = \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ и θ являются сопряженными решениями уравнения Лапласа. Отнесем V_2 к изотермическим координатам u, v , линии которых совпадают с линиями сети c_{ij} . Для гиперболической метрики, определяемой этим тензором, эти координаты будут изотропными, и, согласно § 90,

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{V}{U}, \quad (10)$$

где U и V — функции параметров u и v соответственно. С другой стороны,

$$\chi_i = -\pi_i = c_i^k \psi_k + \psi_i \cos \varphi = \theta_i + \psi_i \cos \varphi,$$

то есть

$$\chi_1 = -\frac{U'}{U} (1 + \cos \varphi) = -\frac{U'}{U} \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = -\frac{2U'U}{U^2 + V^2},$$

$$\chi_2 = -\frac{V'}{V} (1 - \cos \varphi) = -\frac{V'}{V} \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = -\frac{2V'V}{U^2 + V^2},$$

или

$$\chi_i = -\partial_i \ln (U^2 + V^2).$$

Но $c_i = \frac{1}{2} \chi_i$ есть вектор конформного преобразования, переводящего биссекторную сеть в декартову, а это значит, что до преобразования линейный элемент рассматриваемого V_2 имел вид

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2),$$

а в силу (44,5)

$$\chi_i = -\partial_i \ln \lambda.$$

Итак, линейный элемент V_2 , отнесенного к биссекторной сети геодезически-ромбической сети, может быть приведен к виду

$$ds^2 = (U^2 + V^2) (du^2 + dv^2); \quad (11)$$

значит, *биссекторная сеть геодезически-ромбической сети есть сеть Лиувилля, а существование неизотропной геодезически-ромбической сети характеризует метрику Лиувилля.*

Так как координаты u и v могут рассматриваться как декартовы на той плоскости, на которую отображено конформно рассматриваемое V_2 , то из условия (10) следует, что уравнение линий сети может быть записано в виде

$$\frac{dv}{du} = \pm \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \pm \frac{V}{U},$$

или

$$V^2 du^2 - U^2 dv^2 = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим семейство сетей, определяемых более общим уравнением:

$$(V^2 - a) du^2 - (U^2 + a) dv^2 = 0, \quad (13)$$

где $a = \text{const.}$ Для всякой сети этого семейства

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \pm \sqrt{\frac{V^2 - a}{U^2 + a}},$$

$$\overset{a}{\pi}_i = \partial_i \ln (U^2 + V^2) = \pi_i,$$

$$\overset{a}{\Gamma}_i = \overset{a}{c}_i + \frac{1}{2} \overset{a}{\pi}_i = c_i + \frac{1}{2} \pi_i = \Gamma_i = 0,$$

и, таким образом, всякая сеть рассматриваемого семейства будет геодезической и вместе с тем и ромбической, так как

$$\pi_i^a = \text{grad.}$$

Предположив, что тензор исходной сети пронормирован так, что $a_{11} = V^2$, $a_{22} = -U^2$, мы можем записать уравнение (13) в следующем инвариантном виде:

$$(a_{ij} - a g_{ij}) du^i du^j = 0,$$

или

$$a_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = a; \quad (14)$$

следовательно, метрика Лиувилля допускает существование квадратичного интеграла уравнения геодезических линий. Покажем, что существование такого интеграла характеризует метрику Лиувилля.

Дифференцируя (14) и принимая во внимание, что для геодезической линии

$$\delta(du^i) = \lambda du^i,$$

мы будем иметь

$$\nabla_k a_{ij} du^k du^i du^j = 0,$$

а так как это условие должно выполняться для любого направления, то

$$\nabla_{(k} a_{ij)} = 0.$$

Но сеть a_{ij} геодезическая; ее тензор удовлетворяет условию (98,10), т. е.

$$\nabla_k a_{ij} = \mu_k a_{ij} + t_i a_{kj} + t_j a_{ki},$$

откуда

$$\mu_i = -2t_i$$

и

$$\nabla_k a_{ij} = -2t_k a_{ij} + t_i a_{jk} + t_j a_{ik},$$

а чебышевский вектор

$$t_i = -\frac{1}{2} \tilde{a}^{ij} \nabla_k a_{ij} = -\frac{1}{4} \partial_k (a^{ij} a_{ij})$$

градиентен, сеть кодациева, и, следовательно, она геодезически-ромбическая, а существование такой сети характеризует метрику Лиувилля.

§ 103. Проективное отображение A_2

В § 52 было указано, что проективное преобразование связности совпадает с составным преобразованием $(p_i, 0)$. Поэтому чебышевский вектор сети преобразуется при проективном отображении по формуле (52,7), которая принимает вид

$$\check{t}_i = t_i - p_i, \quad (1)$$

а значит, *разность чебышевских тензоров двух сетей есть инвариант проективного преобразования связности.*

Если применить к связности G такое преобразование, вектор которого равен чебышевскому вектору некоторой сети, то после этого преобразования сеть станет чебышевской.

Итак, *среди совокупности связностей, заданных в X_2 и проективных между собою, существует одна и только одна связность $\overset{a}{G}$, по отношению к которой данная сеть a_{ij} будет чебышевской.*

Будем говорить, что связность $\overset{a}{G}$ *присоединена* к связности G *проективно* на базе данной сети. Если данная сеть геодезическая, то по отношению к присоединенной связности она будет также и чебышевской, т. е. декартовой, а существование декартовой сети характеризует метрику Вейля.

Итак, *связность, присоединенная на базе геодезической сети, будет связностью Вейля, в которой данная сеть может быть принята за изотропную.*

Я. С. Дубнов называет геодезическую сеть пространства V_2 *особенной*, если существует другая геодезическая сеть с тем же чебышевским вектором, что и у данной.

Сохраняя это название и для геодезических сетей пространства X_2 , заметим прежде всего, что характеризующее их свойство инвариантно по отношению к любому проективному преобразованию, так как разность их чебышевских векторов остается равной нулю. Далее, находя присоединенную связность на базе особенной геодезической сети, мы видим, что эта связность будет допускать существование двух различных декартовых сетей и, следовательно, будет квазиевклидовой. Если принять одну из рассматриваемых сетей за изотропную сеть присоединенной

связности, то другая станет изогональной, и, следовательно, две геодезические сети с одинаковыми чебышевскими векторами определяют ангармоническое отношение, не зависящее от точки. Так как в присоединенной связности существует ∞^2 декартовых сетей, то в данной связности существует ∞^2 особенных геодезических сетей с одинаковыми чебышевскими тензорами, причем каждые два из них взаимно изогональны.

Итак, для того чтобы данная связность допускала существование особенных геодезических сетей, необходимо и достаточно, чтобы она допускала геодезическое отображение на квазиевклидово пространство, и тогда всякая сеть, отображающаяся на декартову сеть этого квазиевклидова пространства, будет особенной.

Принимая во внимание результаты § 89, можно также сказать, что связность, допускающая существование особенных геодезических сетей, характеризуется и тем, что уравнения ее геодезических допускают первый интеграл вида

$$\frac{a_i du^i}{b_j du^j} = \text{const}, \quad (2)$$

причем семейства линий, соответствующие двум различным значениям постоянной, образуют одну из особенных сетей.

Простейшим примером особенной геодезической сети может служить такая сеть проективно-евклидовой геометрии, которая при геодезическом отображении на плоскость переходит в сеть, образованную двумя прямолинейными пучками. Всякая другая сеть, переходящая в сеть такого же характера, будет иметь тот же чебышевский тензор, что и данная, если центры всех четырех прямолинейных пучков лежат на одной прямой. Действительно, если мы примем эту прямую за несобственную прямую, то обе сети обратятся в декартовы, и, следовательно, до преобразования они имели одинаковые чебышевские векторы.

Приведенное рассуждение показывает, что всякая проективно-евклидова связность допускает существование ∞^2 семейств сетей, каждое из которых содержит ∞^2 особенных геодезических сетей с одинаковыми чебышевскими тензорами.

Будем называть *градиентным* такое проективное преобразование, которое определяется градиентным вектором p_i . Из соотношения (46,3)

$$\check{\Gamma}_{ki}^h - \Gamma_{ki}^h = 3p_i$$

следует, что эквиаффинная геометрия остается эквиаффинной при градиентном преобразовании.

Так как кодацциева сеть пространства эквиаффинной связности характеризуется тем, что ее чебышевский вектор градиентен, то *связность, присоединенная к эквиаффинной связности на базе кодацциевой сети, характеризуется тем, что она эквиаффинна.*

Будем называть *сетью Риччи* геодезическую кодацциеву сеть пространства эквиаффинной связности. Связность, присоединенная к данной на базе сети Риччи, будет вейлевой и эквиаффинной одновременно, т. е. будет римановой. Таким образом, *для того чтобы пространство X_2 эквиаффинной связности допускало геодезическое отображение на V_2 , необходимо и достаточно, чтобы в нем существовала сеть Риччи.*

В частности, если исходное пространство тоже риманово, то его сеть Риччи, характеризуясь условием $t_i = \text{grad}$, есть вместе с тем геодезически-ромбическая сеть (как мы это видели в предыдущем параграфе), и мы приходим к теореме Дини: *V_2 допускает геодезическое отображение на другое V_2 тогда и только тогда, когда его метрика есть метрика Лиувилля.*

Мы видели, что существование неизотропной геодезически-ромбической сети влечет за собою существование целого семейства таких сетей (102,4), а это значит, что V_2 Лиувилля допускает отображение на $\infty^1 V_2$ по крайней мере. Приняв это во внимание, мы заключаем: *если некоторое A_2 эквиаффинной связности допускает существование двух сетей Риччи, то оно допускает и существование ∞^1 таких сетей, так как оно отображается геодезически на $\infty^1 V_2$ Лиувилля.*

Применим полученные результаты к рассмотрению геодезической римановой пары сопряженных связностей. Базисом этой пары будет геодезическая и вместе с тем кодацциева сеть, т. е. сеть Риччи. Если этот базис не совпадает с изотропными сетями сопряженных метрик, то каждая из них будет метрикой Лиувилля.

Итак, риманова геодезическая пара — или самосопряженная, или состоит из двух метрик Лиувилля, сопряженных относительно некоторой общей им геодезически-ромбической сети.

Рассмотрим, наконец, эквипроективное A_2 . Если оно допускает проективное отображение на V_2 , то, согласно теореме Бельтрами, это V_2 есть пространство постоянной кривизны. Но метрика постоянной кривизны, будучи реализована на проективной плоскости, имеет в качестве абсолюта кривую второго класса (которая, в частности, может распадаться на пару пучков), и изотропные прямые метрики касаются абсолюта (или принадлежат пучкам). Отсюда следует, что сетью Риччи эквипроективной связности в X_2 будет такая геодезическая сеть, которая перейдет в сеть прямолинейных касательных к некоторой кривой второго класса при геодезическом отображении на плоскость.

Таким образом, эквипроективная связность допускает существование ∞^5 сетей Риччи. Среди них будет содержаться также ∞^4 сетей, отображающихся на два пучка u , следовательно, являющихся особенными геодезическими.

Последние результаты имеют место, в частности, и для всякого V_2 постоянной кривизны и позволяют прийти к следующему заключению: сеть Лиувилля в пространстве V_2 постоянной кривизны есть биссекторная сеть семейства геодезических, переходящих в сеть прямолинейных касательных к кривой второго класса при геодезическом отображении на плоскость.

В заключение рассмотрим в X_2 произвольной связности пучок сетей с геодезическим базисом a . По отношению к связности, присоединенной на том же базисе к той же сети, она станет изотропной сетью, а сами пучки станут ортогональными. Но в § 98 (пункт 7) мы видели, что ортогональные сети, принадлежащие пучку, имеют одинаковые чебышевские векторы и это свойство сохраняется при возвращении к исходной связности, так как разность чебышевских тензоров сети есть инвариант проективного преобразования.

Таким образом, мы имеем следующую теорему: все сети пучка с геодезическим базисом имеют одинаковые чебышевские векторы.

§ 104. Приложение к теории поверхностей в E_3

Общие формулы теории сетей можно применить к теории поверхностей, предположив, что рассматриваемая сеть совпадает с асимптотической сетью поверхности. Рассмотрим некоторые из приложений к поверхности евклидова пространства.

Асимптотическая сеть b_{ij} поверхности X_2 пространства E_3 определяется тензором второй квадратичной формы, связность совпадает с внутренней связностью этой поверхности, а биссекторная сеть c_{ij} есть сеть линий кривизны.

Величины

$$b^{ij}b_{ij} = 2 \frac{b}{g^2} = 2K, \quad (1)$$

$$g^{ij}b_{ij} = 2H \quad (2)$$

являются *полной и средней кривизнами* поверхности, вследствие чего

$$b_{ij} = \frac{\sqrt{-K}}{\sin \varphi} (\tilde{c}_{ij} + g_{ij} \cos \varphi), \quad (3)$$

а угол φ между асимптотическими направлениями определяется по формуле

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{H}{\sqrt{-K}}. \quad (4)$$

В § 98 (пункт 8) мы видели также, что чебышевский тензор асимптотической сети поверхности X_2 в E_3

$$t_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K. \quad (5)$$

Последнее условие равносильно полной системе условий Гаусса и Кодацци, так как оно обеспечивает градиентный характер чебышевского вектора, т. е. показывает, что асимптотическая сеть кодацциева, а вследствие того, что при соответствующем нормировании

$$t_k = \frac{1}{4} b^{ij} \nabla_k b_{ij} = \frac{1}{4} \partial_k \ln (b^{pq} b_{pq}),$$

имеем

$$b^{ij}b_{ij} = cK,$$

что равносильно условию Гаусса.

Пользуясь соотношениями (4) и (5), мы можем выразить все векторы χ_i , Γ_i и c_i через коэффициенты основных квадратичных форм поверхностей. Найдем, например, выражение *чебышевского тензора сети линий кривизны*:

$$\begin{aligned} c_i &= \chi_i + \frac{1}{2} \pi_i = t_i + c_i^k \left(t_k \cos \varphi - \frac{1}{2} \psi_k \right) - \frac{1}{2} \psi_i \cos \varphi = \\ &= t_i - \frac{1}{2} \partial_i \ln \sin \varphi + c_i^k \left(t_k - \frac{1}{2} \partial_k \ln \operatorname{tg} \varphi \right) \cos \varphi. \end{aligned}$$

Но

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi}} = \frac{\sqrt{H^2 - K}}{H}, \quad \cos \varphi = \frac{K}{H},$$

откуда

$$c_i = \frac{1}{4} \left[\partial_i \ln (H^2 - K) + \frac{2c_i^k \partial_k H}{\sqrt{H^2 - K}} \right]. \quad (6)$$

Рассмотрим некоторые специальные виды поверхностей в E_3 .

Поверхность называется *изотермической*, если сеть ее линий кривизны изотермическая. Согласно пункту 4 § 102 такая поверхность характеризуется градиентностью чебышевского вектора c_i , или условием

$$\frac{c_i^k \partial_k H}{\sqrt{H^2 - K}} = \operatorname{grad}. \quad (7)$$

Вектор $\theta_k = \frac{\partial_k H}{\sqrt{H^2 - K}}$ будет градиентным на *поверхностях Вейнгартена*, характеризующихся функциональной зависимостью между H и K . Согласно (7) эти поверхности будут изотермическими в том и только том случае, если $c_i^k \theta_k$ градиентен, т. е. если векторы θ_k и $c_i^k \theta_k$ определяют два сопряженных лапласовых поля в гиперболической метрике тензора c_{ij} . Но в таком случае, принимая линии кривизны за параметрические, мы получим следующий результат: *поверхность Вейнгартена будет изотермической в том и только том случае, если ее средняя кривизна может быть представлена в виде $H = f\{U(u) + V(v)\}$.*

Из этого общего положения сразу следует, что *поверхность вращения и поверхность постоянной средней кривизны являются изотермическими.*

В частном случае *минимальной поверхности*, т. е. поверхности нулевой средней кривизны, асимптотическая сеть ортогональна и, будучи кодацциевой, будет сама изотермической. Все сети пучка ортогональных сетей, содержащего асимптотическую сеть, имеют одинаковые чебышевские векторы (§ 98, пункт 7)

$$t_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K,$$

и, следовательно, их тензоры удовлетворяют условиям Гаусса и Кодацци. Отсюда следует, что *минимальная поверхность может изгибаться непрерывно, оставаясь при этом минимальной, так что ее асимптотические направления поворачиваются при этом на угол, не зависящий от точки.* Условие $H = 0$ может быть истолковано так же, как условие сопряженности изотропной сети. С этой точки зрения минимальные поверхности являются частным видом *поверхностей Фосса*, которые характеризуются существованием сопряженной геодезической сети, или *основания Фосса*. Сети пучка, содержащего асимптотическую сеть поверхности Фосса, базис которого совпадает с основанием Фосса, все имеют одинаковые чебышевские векторы (§ 103), и, значит, и для тензоров всех этих сетей одновременно выполняются условия Гаусса и Кодацци. Отсюда следует, что *всякая поверхность Фосса изгибается непрерывно, причем основание Фосса остается сопряженным, т. е. является, по терминологии Петерсона, главным основанием изгибания.*

Рассмотрим некоторую геодезическую линию на поверхности вращения и, отразив ее зеркально в плоскости меридиана, будем вращать полученную пару линий; множество всех линий, полученных при этом вращении, образует сеть, которая, очевидно, будет геодезической, а ее биссекторная сеть совпадает с сетью линий кривизны. Но эта последняя сеть — изотермическая, откуда следует, что построенная нами геодезическая сеть — ромбическая. Таким образом, *поверхности, наложимые на поверхность вращения, суть поверхности Лиувилля.* Рассмотренная нами геодезическая сеть вращения может быть построена

∞^1 существенно различными способами, если менять угол, который геодезическая образует с меридианом в данной точке. Отсюда следует, что *на поверхности вращения существует по крайней мере ∞^2 геодезически-ромбических сетей.*

Прямолинейные образующие линейчатой поверхности будут геодезическими и асимптотическими одновременно, а следовательно, асимптотическая сеть будет полугеодезической, вследствие чего линейчатая поверхность характеризуется условием

$$I = \frac{1}{2} \tilde{b}^{ij} \tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_j = 0, \quad (8)$$

которое легко проверяется в специальной системе координат, а поверхность второго порядка — условием

$$\Gamma_i = 0. \quad (9)$$

В последнем случае поверхность допускает существование кодацциевой геодезической сети, совпадающей с асимптотической сетью поверхности, а значит, эта сеть будет геодезически-ромбической. Отсюда следует, что *поверхности, наложимые на поверхность второго порядка, будут поверхностями Лиувилля. Сеть линий кривизны поверхности второго порядка будет сетью Лиувилля, а следовательно, поверхности второго порядка — изотермические.*

ПОВЕРХНОСТИ ТРЕХМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

§ 105. Нормализованная поверхность в P_3

Поверхность X_2 проективного пространства P_3 является его гиперповерхностью, и к ней могут быть применены все определения и результаты главы V. Согласно принятому там условию мы будем предполагать, что рассматриваемая поверхность неразвертывающаяся, т. е. ее асимптотические линии образуют действительную или мнимую сеть. В последнем случае на поверхности задано поле эллиптических инволюций, определяющих сопряженность двух направлений, лежащих в касательной плоскости.

Поверхность называется *нормализованной*, если

через каждую ее точку проходит *нормаль первого рода* — прямая, не лежащая в плоскости, касающейся поверхности в этой точке.

в каждой ее касательной плоскости лежит *нормаль второго рода* — прямая, не проходящая через точку прикосновения этой плоскости к поверхности.

Всякому направлению на нормализованной поверхности относятся:

нормальная точка этого направления, которая лежит на пересечении нормали второго рода с прямой, касающейся поверхности вдоль кривой данного направления.

нормальная плоскость данного направления, которая проходит через нормаль первого рода и характеристику развертывающейся поверхности, касающейся поверхности вдоль кривой данного направления.

Из приведенных определений следует, что: 1) *нормальная точка и нормальная плоскость инцидентны, если*

соответствующие им направления сопряжены между собою; 2) нормальная точка и нормальная плоскость, соответствующие одному и тому же направлению, определяют в касательной плоскости две прямые, проходящие через точку прикосновения по сопряженным направлениям.

На нормализованной поверхности однозначно определяются две внутренние аффинные связности без кручения, которые вполне характеризуются следующими условиями:

для того чтобы направление переносилось параллельно по отношению к связности первого рода, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ему нормальная точка смещалась в инцидентной ей нормальной плоскости.

для того чтобы направление переносилось параллельно по отношению к связности второго рода, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ему нормальная плоскость вращалась вокруг инцидентной ей нормальной точки.

Из этих и предыдущих определений сразу следует, что внутренние связности нормализованной поверхности сопряжены между собой относительно асимптотической сети.

Чтобы извлечь из приведенных результатов чисто синтетическим путем наибольшее число следствий, введем некоторые определения.

Всякой кривой $u^i = u^i(t)$ аналитического многообразия, определенного значениями криволинейных координат поверхности, соответствует

линия g , как место точек поверхности.

развертка *), как огибающая плоскостей, касающихся поверхности.

Если вдоль кривой $u^i = u^i(t)$ задана последовательность направлений $l^i = l^i(t)$, то ей соответствуют

линейчатая поверхность R_l , образующая которой соединяет точку M кривой g

линейчатая поверхность R_λ , образующая которой лежит на пересечении касательной

*) В дальнейшем будем называть так развертывающиеся поверхности.

с нормальной точкой направления l^i .

плоскости поверхности в точке M с нормальной плоскостью направления l^i .

Направления соответствующих образующих R_l и R_λ сопряжены между собою. Будем называть

ассоциированной точкой последовательности направлений $l^i(t)$ точку, в которой нормальная плоскость, проходящая через образующую R_l , коснется этой поверхности.

ассоциированной плоскостью последовательности направлений $l^i(t)$ плоскость, касающуюся поверхности R_λ в нормальной точке, лежащей на ее образующей.

Последовательность направлений $l^i(t)$ назовем *сопряженной*, если направление l^i сопряжено направлению кривой g , вдоль которой задана последовательность.

R_l *сопряженной последовательности* есть развертка, описанная вдоль кривой g .

R_λ *сопряженной последовательности* есть развертка, ребро возврата которой совпадает с линией g' .

Называя *характеристической точкой* кривой g точку ребра возврата развертки, описанной вдоль этой кривой, отметим, что

ассоциированную точку сопряженной последовательности следует считать совпавшей с *характеристической точкой* кривой g .

ассоциированную плоскость сопряженной последовательности следует считать совпавшей с *соприкасающейся плоскостью* кривой g' .

Будем называть последовательность направлений $l^i(t)$ *тангенциальной*, если направление l^i совпадает с направлением кривой g , вдоль которой задана последовательность.

Ассоциированная точка тангенциальной последовательности или *совпадает с*

Ассоциированная плоскость тангенциальной последовательности или *совпа-*

точкой кривой g , или неопределенна, что имеет место тогда и только тогда, когда соприкасающаяся плоскость линии g нормальна.

дает с касательной плоскостью поверхности в точке кривой g' , или неопределенна, что имеет место тогда и только тогда, когда характеристическая точка кривой g' нормальна.

Рассмотрим последовательность направлений, параллельных по отношению к связности первого рода вдоль кривой g . В то время как точка движется по g , нормальная точка L направления последовательности пробегает кривую g' , расположенную на R_1 и, по свойству параллельного перенесения, каждое ее бесконечно малое смещение совершается в нормальной плоскости. Эта плоскость, проходя через образующую R_1 и касаясь кривой g' , должна касаться R_1 в точке L . Обратив полученный результат двойственно и применив его к перенесению второго рода, мы получаем следующие положения:

ассоциированная точка последовательности направлений, параллельных по отношению к связности первого рода, лежит на нормали второго рода.

ассоциированная плоскость последовательности направлений, параллельных по отношению к связности второго рода, проходит через нормаль первого рода.

Геодезическая линия есть тангенциальная последовательность параллельных направлений. Поэтому,

для того чтобы линия была геодезической первого рода, необходимо и достаточно, чтобы ее соприкасающаяся плоскость проходила через нормаль первого рода.

для того чтобы линия была геодезической второго рода, необходимо и достаточно, чтобы ее характеристическая точка лежала на нормали второго рода.

Будем говорить о *поле направлений*, если в каждой точке некоторой области X_2 задано направление. На всякой линии g , проходящей в области, поле определяет последовательность направлений L_g , про которую мы будем говорить,

что она *принадлежит полю*. Линии, вдоль которых L_g тангенциальны, назовем *линиями поля*, а линии, вдоль которых L_g сопряжены, — *сопряженными траекториями поля*. Семейства тех и других линий, вообще говоря, образуют сопряженную сеть и совпадают между собою только для поля асимптотических направлений.

Совокупность прямых, соединяющих точки поля с нормальными точками его направлений, образуют *конгруэнцию данного поля*, а вторые фокусы лучей — *фокальную поверхность этого поля*. Каждая из линий поля служит ребром возврата для одной из разверток конгруэнции поля. Развертки другого семейства имеют ребро возврата на фокальной поверхности поля, и каждая из этих разверток есть R_l для сопряженной последовательности поля. Иными словами, *ассоциированная точка сопряженной последовательности поля лежит на его фокальной поверхности*.

Называя поле *геодезическим*, если его линии геодезические, рассмотрим произвольную последовательность L_g , принадлежащую геодезическому полю первого рода. Пусть F — фокус поля, соответствующий точке M линии g . При бесконечно малом смещении точки M точка F перемещается в плоскости, касающейся фокальной поверхности поля. Но эта плоскость — соприкасающаяся для линии поля, и, так как эти линии геодезические, *фокальная плоскость конгруэнции геодезического поля нормальна*. Точка F смещается в нормальной плоскости и вместе с тем принадлежит поверхности R_l , значит, она совпадает с ассоциированной точкой L_g .

Итак, *ассоциированная точка любой последовательности направлений геодезического поля первого рода совпадает с фокусом конгруэнции этого поля*.

Рассмотрим теперь поле направлений, абсолютно параллельных по отношению к связности первого рода. С одной стороны, поле это будет геодезическим, с другой стороны, ассоциированные точки любой его последовательности будут нормальными. Сопоставляя эти факты, мы приходим к следующему выводу: *направления поля будут абсолютно параллельны по отношению к связности первого рода, если нормаль первого рода лежит в фокальной плоскости конгруэнции поля, а нормаль второго рода проходит через его фокальную точку*.

Поле направлений, абсолютно параллельных по отношению к связности второго рода, можно было просто охарактеризовать тем фактом, что его направления сопряжены с такими направлениями, которые абсолютно параллельны по отношению к связности первого рода.

§ 106. Сети на нормализованной поверхности

Задание сети равносильно заданию двух полей независимых направлений. На каждой линии сети определяется последовательность направлений линий другого семейства. Будем называть

ассоциированной прямой первого рода сети, заданной на $N(X_2)$, прямую, соединяющую ассоциированные точки обеих последовательностей направлений сети, линии которых пересекаются в данной точке M^*). Эта прямая лежит в касательной плоскости, но не проходит через точку M поверхности.

ассоциированной прямой второго рода сети, заданной на $N(X_2)$, прямую пересечения ассоциированных плоскостей обеих последовательностей направлений сети, линии которых пересекаются в данной точке M . Эта прямая проходит через точку M поверхности, но не лежит в ее касательной плоскости.

Так как каждая линия сопряженной сети служит сопряженной траекторией поля направлений сети, то ассоциированные точки обеих последовательностей такой сети совпадают с фокусами полей, определяемых сетью. Приняв во внимание этот результат и обратив его двойственно, мы придем к следующим положениям:

Ассоциированная прямая первого рода сопряженной сети совпадает с ее ребром Грина.

Ассоциированная прямая второго рода сопряженной сети совпадает с ее осью Грина $**$).

*) Условимся, что ассоциированная прямая ассоциирована сети относительно той прямой, которая совпадает с нормалью первого рода. В литературе такая связь между двумя прямыми и сетью называется «отношением R ».

**) *Осью Грина* сети называют прямую пересечения соприкасающихся плоскостей линий сети, а *ребром Грина* — прямую, соединяющую вторые фокальные точки конгруэнции прямых, касающихся линий сети.

Как известно, одна из квадрик, соприкасающихся поверхности X_2 (а именно *поверхность Ли* L_2) может быть определена как поверхность, проходящая через три бесконечно близких прямолинейных образующих асимптотического направления, которые касаются поверхности в точках асимптотической линии другого семейства. Известно также, что L_2 , построенные в данной точке поверхности для двух различных асимптотических линий, совпадают между собою.

Для нас существенно, что L_2 содержит в системах своих образующих по две бесконечно близких асимптотических касательных каждого семейства, так как отсюда вытекает способ построения ассоциированных прямых асимптотической сети.

Действительно, для определения ассоциированных точек нам придется взять нормальную плоскость асимптотического направления и найти точку ее прикосновения к R_1 . Но, по определению L_2 , она касается R_1 вдоль всей прямолинейной образующей, и, следовательно, касаясь R_1 , нормальная плоскость в той же точке коснется и L_2 . Значит, нормаль первого рода является прямой пересечения двух плоскостей, касающихся L_2 в точках ее пересечения с ассоциированной прямой асимптотической сети, и, таким образом,

ассоциированная прямая первого рода асимптотической сети есть поляр нормали первого рода относительно соприкасающейся поверхности Ли.

ассоциированная прямая второго рода асимптотической сети есть поляр нормали второго рода относительно соприкасающейся поверхности Ли.

Геодезическая сеть первого рода состоит из линий двух геодезических полей, которые, как уже было показано, имеют ассоциированные точки всех своих последовательностей в фокусах конгруэнций, касающихся линий поля. Отсюда следует, что *ассоциированная прямая первого рода геодезической сети первого рода совпадает с ее ребром Грина*. Уместно добавить, что *ось Грина этой же сети совпадает с нормалью первого рода*.

Если сеть чебышевская первого рода, то всякая последовательность сети состоит из направлений, параллельных по

отношению к геометрии первого рода, а значит, ее ассоциированные точки лежат на нормали второго рода.

Итак, для того чтобы сеть была чебышевской первого рода, необходимо и достаточно, чтобы ее ассоциированная прямая совпадала с нормалью второго рода.

Применяя последний результат к асимптотической сети, мы видим, что она является чебышевской тогда и только тогда, когда нормали первого и второго рода сопряжены полярно по отношению к L_2 , а это значит, что поляритет относительно поверхности Ли совпадает для X_2 с тем соприкасающимся поляритетом, о котором мы говорили в § 67, рассматривая гиперповерхности проективного пространства.

В §§ 58 и 67 указан способ, с помощью которого можно определить положение виртуальной нормали второго рода, т. е. прямой, расположенной в касательной плоскости X_2 , но не проходящей через точку прикосновения, задав соответствующий ковариантный вектор. Мы видели также, что этот вектор при замене нормали второго рода преобразуется по закону (67,2):

$$\check{a}_i = a_i - p_i.$$

При этой же замене внутренняя геометрия претерпевает проективное преобразование, определяемое тем же вектором p_i ; следовательно, чебышевский вектор первого рода всякой сети преобразуется по формуле (103,1):

$$\check{t}_i = t_i - p_i.$$

откуда вытекает, что разность $a_i - t_i$ инвариантна при замене нормали второго рода.

Пусть теперь a_i — вектор, определяющий ассоциированную прямую первого рода той же сети, для которой вычислен чебышевский вектор t_i . Положение этой прямой не зависит от выбора нормали второго рода, а значит, предыдущий результат применим и к разности $a_i - t_i$.

Произведем такое преобразование нормали второго рода, которое соответствует переходу к связности первого рода, присоединенной к данной связности на базе рассматриваемой сети. В результате сеть станет чебышевской, а ассоциированная прямая совпадет с нормалью второго рода и ее положение будет определяться вектором $\check{a}_i = 0$.

Таким образом,

$$t_i - a_i = \check{t}_i - \check{a}_i = 0.$$

Обращая полученный результат по принципу двойственности, мы приходим к следующему:

Положение ассоциированной прямой первого рода сети определяется по формулам (67,1) ее чебышевским вектором первого рода.

Положение ассоциированной прямой второго рода сети определяется по формулам (67,1') ее чебышевским вектором второго рода.

Далее, в § 68 нами было введено понятие *средних многообразий* для двух виртуальных нормалей гиперповерхности. В случае X_2 оба средних многообразия будут прямолинейными и их положение будет определяться, согласно (68,2), векторами

$$\alpha_i = \frac{1}{2} (a_i + \alpha_i - t_i), \quad a_i = \frac{1}{2} (a_i + \alpha_i + t_i), \quad (1)$$

где t_i — чебышевский вектор асимптотической сети. Предполагая, что a_i и α_i — чебышевские векторы первого и второго родов некоторой сети, мы приходим к выводу, что *средние ассоциированные прямые сети*, т. е. ее средние прямые ассоциированных прямых, *определяются векторами*

$$\theta_i + \frac{t_i}{2}, \quad \theta_i - \frac{t_i}{2}, \quad (2)$$

где θ_i есть, согласно (51,8), чебышевский вектор сети по отношению к средней связности связностей первого и второго родов. Для того чтобы сеть была чебышевской по отношению к средней метрике, необходимо и достаточно, чтобы $\theta_i = 0$, а согласно (68,3) это значит, что *средние ассоциированные прямые чебышевской сети средней метрики совпадают со средними нормальными $N(X_2)$.*

Опираясь на этот результат, выясним, как следует нормализовать поверхность, чтобы *средняя связность была квазиевклидовой*. Квазиевклидова связность характеризуется тем, что она допускает существование пучка ортогональных декартовых сетей. Если квазиевклидова связность есть средняя связность $N(X_2)$, то каждая из этих сетей будет сопряженной и вместе с тем чебышевской, т. е.

ее средние ассоциированные прямые совпадают со средними нормальными поверхностями. Обратно, если это имеет место хотя бы для одной сопряженной сети, то она будет чебышевской ортогональной сетью средней связности, т. е. декартовой сетью, отличной от изотропной, и, значит, связность будет квазиевклидовой. Заметим, наконец, что ассоциированные прямые сопряженной сети совпадают с ее прямыми (осью и ребром) Грина, а средние ассоциированные прямые сопряженной сети естественно назвать ее *средними прямыми Грина* *). Итак, для того чтобы средняя метрика $N(X_2)$ была квазиевклидовой, необходимо и достаточно, чтобы средние нормали совпадали со средними прямыми Грина некоторой сопряженной сети.

Так как это совпадение имеет место для любой сети пучка, содержащего данную сеть, то мы имеем следующую теорему: *все сопряженные сети одного пучка имеют общие средние прямые Грина.*

Предположим, наконец, что средняя метрика евклидова, т. е. является одновременно и квазиевклидовой, и эквиаффинной. Сопряженная сеть, средние прямые Грина которой совпадают со средними нормальными, будет ортогональной декартовой сетью евклидовой связности, а это значит, что основная форма поверхности, отнесенная к рассматриваемой сопряженной сети как к координатной, может быть приведена к виду

$$b_{ij}du^i du^j = \sigma du^2 + dv^2, \quad \sigma = \pm 1,$$

и сеть называется вследствие этого *изотермически сопряженной*. Так как декартова изотермическая ортогональная сеть возможна только в евклидовой геометрии (§ 101, пункт 4), то *евклидова средняя метрика характеризует такую нормализацию, средние нормали которой совпадают со средними прямыми Грина изотермически сопряженной сети*. В § 68 мы видели, что эквиаффинная средняя связность определяется такими средними нормальными, которые составляют конгруэнции, сопряженные и гармоничные поверхности. Таким образом, *изотермически сопряженная сеть характеризуется тем, что ее средние прямые Грина образуют такие конгруэнции, одна из которых сопряжена, а другая гармонична поверхности*.

*) Средние прямые Грина известны в английской литературе под названием *cusp-axis* и *flex-ray*.

§ 107. Ось и ребро сети

Предположим, что пара внутренних геометрий $N (X_2)$ вейлева, и выясним характер нормализации. Так как изотропная сеть связности первого рода является декартовой, т. е. чебышевской и геодезической одновременно, то ребро Грина совпадает с нормалью второго рода, а ось Грина — с нормалью первого рода поверхности. Итак, *для того чтобы пара внутренних связностей нормализованной поверхности была вейлевой, необходимо и достаточно, чтобы нормали совпадали с прямыми Грина той сети, которая и окажется в этом случае декартовой сетью связности первого рода.*

Построение указанной нормализации можно провести еще так. Рассмотрим наряду с поверхностью S , подлежащей нормализации, две другие поверхности S_1 и S_2 и выделим на S область точек так, чтобы через каждую из них можно было провести по одной общей касательной к S и S_1 , S и S_2 . С помощью этих касательных установится соответствие между точками M , M_1 и M_2 , взятыми в допустимых областях на S , S_1 , S_2 соответственно. Будем теперь считать нормалью второго рода поверхности S прямую M_1M_2 и за нормаль первого рода примем прямую пересечения касательных плоскостей к S_1 в точке M_1 и к S_2 в точке M_2 . Прямые MM_1 и MM_2 определяют на поверхности два поля направлений, которые, согласно § 105, являются полями абсолютно параллельных направлений в связности первого рода. Сеть, определяемая этими полями, декартова, а это значит, что связность первого рода является связностью Вейля. Все приведенные соображения сохраняют силу и в том случае, если одна или обе поверхности S_1 и S_2 вырождаются в линии (считаем при этом, что прямые MM_1 и MM_2 касаются S и пересекают соответствующие линии).

Если области точек S_1 и S_2 принадлежат одной поверхности второго класса Q_2 , то прямая M_1M_2 , соединяющая две точки поверхности, и нормаль первого рода, по которой пересекаются плоскости, касающиеся Q_2 в этих точках, сопряжены полярно и нормализация поверхности полярна относительно Q_2 . В полном соответствии с этим на поверхности определяется такая риманова геометрия, изотропная сеть которой касается прямых MM_i . Наконец, если поверхность Q_2 вырождается и ее задание сводится к

заданию кривой второго порядка, то картина нормализации совпадает с той, какую представляет естественная нормализация поверхности евклидова пространства.

Если пара внутренних геометрий Вейля *конформная*, то базис пары ортогонален, а значит, общие изотропные сети внутренних геометрий совпадают с некоторой сопряженной сетью. Итак, *для того чтобы пара внутренних связностей $N(X_2)$ была конформной, необходимо и достаточно, чтобы нормали совпадали с прямыми Грина некоторой сопряженной сети.*

Из свойств конформной пары напомним следующие: эта пара допускает существование ∞^1 базисов, образующих пучок сетей, гармонически разделяющих общую изотропную сеть пары; средняя метрика пары квазиевклидова, и базисы совпадают с ортогональными декартовыми сетями этой метрики, которую можно считать тоже конформной метрикой первого и второго родов (§ 98, пункт 7).

Если нормали совпадают с прямыми Грина сопряженной сети Σ , то за базис пары можно принять как асимптотическую сеть поверхности, так и всякую другую сеть, гармонически разделяющую сеть Σ и образующую с асимптотической сетью постоянное ангармоническое отношение. Воспользуемся теперь тем фактом, что в связности Вейля все сети пучка ортогональных сетей имеют одинаковые чебышевские тензоры (§ 98, пункт 7). Отсюда следует, что все сети, могущие служить базисом конформной пары внутренних связностей, имеют совпадающие ассоциированные прямые первого и второго родов, которые совпадают с ассоциированными прямыми асимптотической сети, т. е. с полярами нормалей первого и второго родов относительно поверхности Li .

Принимая это во внимание, мы можем сформулировать следующие теоремы:

Прямая, полярная оси Грина сопряженной сети Σ , ассоциирована всякой сети пучка с базой Σ по отношению к этой оси.

Ребро Грина сопряженной сети Σ ассоциировано всякой сети пучка с базой Σ по отношению к прямой, полярной ребру Грина.

В частности, среди сетей рассмотренного пучка существует единственная сеть, гармонически разделяющаяся

с асимптотической, т. е. тоже сопряженная. Отсюда следует, что *разнородные прямые Грина двух сопряженных сетей, гармонически разделяющих друг друга, взаимно полярны относительно поверхности Ли.*

Для дальнейшего нам будет полезно рассмотреть такую сопряженную сеть Σ на поверхности S , которая образована двумя полями направлений так, что фокальные поверхности этих полей S_1 и S_2 вырождаются в линии. Зафиксируем точку M_1 на линии S_1 и рассмотрим все прямые MM_1 , касающиеся S в точке M . Эти прямые составляют конус, а линия прикосновения конуса к S является сопряженной траекторией поля направления MM_1 , т. е. принадлежит рассматриваемой сети.

Таким образом, *сеть Σ состоит из конических линий тени, определяемых светящимися точками M_1 и M_2 , расположенными на кривых S_1 и S_2 .* Если мы снова зафиксируем точку M_1 и будем менять положение точки M_2 , то прямая M_1M_2 опишет конус, а точка M — линию сети Σ .

Следовательно, развортывающиеся поверхности конгруэнции, образованной всевозможными прямыми M_1M_2 , соответствуют сопряженной сети на поверхности S , и, значит, конгруэнция M_1M_2 будет гармонична этой поверхности. Но в таком случае вектор точки поверхности x может быть пронормирован канонически, т. е. так, чтобы при этом точки $\partial_i x$ лежали на прямой M_1M_2 .

Приняв сеть Σ за координатную, мы получим

$$\partial_1 x = \lambda U, \quad \partial_2 x = \mu V,$$

где U и V — векторы, зависящие только от u^1 и u^2 соответственно. Но условия интегрируемости системы дают нам

$$\partial_2 \ln \lambda \partial_1 x = \partial_1 \ln \mu \partial_2 x,$$

вследствие чего λ и μ зависят тоже только от u^1 и u^2 соответственно и могут быть включены в выражения U и V . Таким образом, *при каноническом нормировании вектор точки поверхности, допускающей существование сопряженной координатной сети с фокальными поверхностями, вырождающимися в линии, имеет вид*

$$x = U(u^1) + V(u^2). \quad (1)$$

§ 108. Аффинная нормализация поверхности R_3

Если поверхность S нормализована аффинно, т. е. ее нормали второго рода лежат в несобственной плоскости R_3 , то, согласно предыдущему, ее внутренние связности будут образовывать вейлеву пару тогда и только тогда, когда фокальные многообразия S_1 и S_2 изотропной сети первого рода будут расположены в R_3 , что возможно, очевидно, только и только тогда, когда они вырождаются в две плоские несобственные линии.

Чтобы охарактеризовать изотропную сеть первого рода в терминах аффинной геометрии, заметим, что если несобственная точка M_1 кривой S_1 зафиксирована, а точка M прикосновения прямой MM_1 к поверхности S движется по этой поверхности, то она описывает *цилиндрическую линию тени*, которая будет одновременно сопряженной траекторией поля изотропных направлений первого рода. Отсюда следует такое заключение:

Для того чтобы аффинная нормализация определила на поверхности вейлеву пару внутренних связностей, необходимо и достаточно, чтобы нормаль первого рода была осью Грина сети, образованной сопряженными траекториями двух произвольных семейств цилиндрических линий тени на поверхности.

Если пара внутренних геометрий будет, кроме того, конформной, то изотропная сеть первого рода должна быть сопряжена, т. е. сама состоит из цилиндрических линий тени. Но в таком случае, приняв ее за координатную, мы получим из (107.1)

$$x^i = U^i + V^i, \quad (1)$$

так как каноническое нормирование точек поверхности аффинного пространства совпадает с ее декартовым нормированием. Однако уравнение (1) определяет поверхность переноса, и, следовательно, *аффинная нормализация индуцирует на поверхности R_3 конформную пару вейлевых геометрий тогда и только тогда, когда это поверхность переноса, а нормаль первого рода совпадает с осью Грина сети переноса, вследствие чего эта сеть совпадает с изотропными сетями обеих внутренних метрик.*

Применим теорему, сформулированную нами в § 107, к сетям переноса. Согласно этой теореме ось Грина сопря-

женной сети, разделяющей гармонически сети переноса, взаимна ребру этой сети. Но это ребро лежит в бесконечности, а значит, *ось Грина сопряженной сети, гармонически разделяющей сеть переноса, совпадает с аффинной нормалью поверхности переноса.*

Так как асимптотическая сеть минимальной поверхности в E_3 ортогональна, то ее внутренние связности образуют конформную пару. Но нормализация в E_3 аффинная, и мы непосредственно из предыдущего получаем классический результат Монжа: *минимальная поверхность есть поверхность переноса, сеть переноса которой изотропна.* Наконец, так как сопряженная сеть, гармонически разделяющая изотропную, есть сеть линий кривизны поверхности в E_3 , то *ось Грина линий кривизны минимальной поверхности в E_3 совпадает с аффинной нормалью этой поверхности.*

В § 48 было показано, что проективно-евклидова связность Вейля при $n > 2$ может быть только связностью пространства постоянной кривизны. Перейдем теперь к рассмотрению случая $n = 2$, который в § 48 остался неисследованным. Заметим, что, согласно § 71, всякая проективно-евклидова связность может быть реализована в качестве внутренней связности второго рода на гиперповерхности, нормализованной аффинно, причем эта связность определяется на несобственной гиперплоскости с помощью соответствия между нормальными векторами второго рода и вершинами нормалей первого рода. Но если мы предположим, что эта проективно-евклидова связность есть в то же время связность Вейля, то сопряженная ей связность первого рода тоже будет вейлевой и соответствие, которое определяется в несобственной плоскости, будет, согласно предыдущему, соответствием между прямой M_1M_2 , соединяющей точки двух кривых, и прямой, соединяющей точки пересечения касательных μ_1 и μ_2 к этим кривым в точках M_1 и M_2 , так как нормаль первого рода поверхности S будет прямой пересечения касательных плоскостей к этим кривым. Итак, *произвольная проективно-евклидова связность W_2 есть внутренняя связность такого соответствия на плоскости, которое относит прямую, соединяющую точки M_1 и M_2 двух произвольных кривых, точку пересечения касательных к тем же кривым в точках M_1 и M_2 .* Связность, определенная таким образом, не будет, вообще говоря,

эквиваффинной. Действительно, будучи эквиваффинной, она была бы связностью пространства постоянной кривизны, которая реализуется на проективной плоскости с помощью задания полярного соответствия относительно некоторой кривой второго порядка. Однако в таком случае прямые изотропной сети касались бы этой кривой и, следовательно, наши кривые стали бы двумя ее дугами.

§ 109. Расслояемая пара конгруэнций

Если на $N (X_2)$ определяется *квазиевклидова* пара внутренних связностей, то связность первого рода допускает существование ∞^1 полей абсолютно параллельных направлений. Фокусы каждого из этих полей лежат на нормали второго рода, а их фокальные плоскости проходят через нормаль первого рода. Таким образом, при рассматриваемой нормализации поверхности S существует ∞^1 поверхностей S' , расположенных так, что их точки лежат на нормали второго рода, а касательные плоскости в этих точках проходят через соответствующую нормаль первого рода. Таким образом, *для того чтобы пара внутренних связностей нормализованной поверхности была квазиевклидовой, необходимо и достаточно, чтобы пара конгруэнций, нормализующих поверхность, была расслояема в направлении нормали второго рода.*

Если дана *вполне расслояемая пара конгруэнций*, т. е. расслояемая в направлении обеих этих конгруэнций, то, нормализуя каждую из ∞^1 расслояющих поверхностей, точки которых лежат на луче каждой из конгруэнций, мы будем иметь нормализацию, расслояемую в направлениях нормалей первого и второго родов. Но при расслоении в направлении нормали первого рода средняя связность риманова (§ 70), и мы приходим к следующему результату: *вполне расслояемая пара конгруэнций индуцирует на каждой из расслояющих поверхностей такую квазиевклидову пару связностей, средняя метрика которой риманова.*

Если связность первого рода на $N (X_2)$ допускает существование *особенной геодезической сети*, то, как это было показано в § 103, существует ∞^2 геодезических сетей с одинаковыми чебышевскими векторами, т. е. и с общей ассоциированной прямой. Однако ассоциированная прямая геодезической сети соединяет фокусы обоих полей, образующих

сеть, а в данном случае содержит ∞^1 фокусов геодезических полей, что характеризует расслоимость пары конгруэнций, составленных из нормалей первого рода и этих ассоциированных прямых. Обратно, допустим, что конгруэнция нормалей первого рода допускает существование конгруэнции прямых, расположенных в касательных плоскостях $N(X_2)$, и образует пару, расслоемую в направлении последних прямых. В таком случае, совместив нормаль второго рода с этой прямой, мы подвергаем внутреннюю геометрию такому проективному преобразованию, после которого ее связность первого рода станет квазиевклидовой, а это значит, что до преобразования она допускала существование особенных геодезических сетей. Итак, для того чтобы внутренняя связность первого рода нормализованной поверхности допускала существование особенных геодезических сетей, необходимо и достаточно, чтобы в касательных плоскостях этой поверхности можно было расположить лучи l конгруэнции, образующей с конгруэнцией нормалей первого рода пару, расслоемую в направлении луча l .

§ 110. Главные линии нормализованной поверхности

В § 65 было показано, что нормализованная гиперповерхность определяется заданием внутренней связности первого рода и тензоров b_{ij} и p_{ij} , или двойственно — заданием внутренней связности второго рода и величин b_{ij} , π_{ij} , если все эти величины удовлетворяют условиям интегрируемости (65,7). Далее, мы установили, что тензоры p_{ij} и π_{ij} определяются заданием внутренних геометрий и тензора b_{ij} , однако этот последний результат был получен в предположении $n > 2$, т. е. остался недоказанным для поверхности в P_3 . Обращаясь к этим поверхностям, заметим, прежде всего, что по свойству X_2 задание тензора кривизны равносильно заданию тензора Риччи, вследствие чего, сохраняя все остальные условия интегрируемости основных уравнений поверхности, мы можем заменить условия (65,7BI) более простыми соотношениями (65,11):

$$R_{ji} = p_{ij} - 2p_{ji} + b_{ik}g^k_{,j} - b_{ij}g^k_{,k},$$

или еще более удобными соотношениями (65,12):

$$\left. \begin{aligned} R_{ji} &= p_{ij} - 2p_{ji} + \pi_{ji} - (\Omega + b^{pq}\pi_{pq}) b_{ij}, \\ \rho_{ji} &= \pi_{ij} - 2\pi_{ji} + p_{ji} - (\Omega + b^{pq}p_{pq}) b_{ij}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $\Omega = X\Xi$ зависит от выбора положения вершины и основания нормали. После альтернирования эти уравнения разрешаются относительно $p_{[ij]}$ и $\pi_{[ij]}$ и дают согласно (65,16)

$$\left. \begin{aligned} p_{[ij]} &= \frac{1}{8} (3R_{[ji]} + \rho_{[ji]}), \\ \pi_{[ij]} &= \frac{1}{8} (3\rho_{[ji]} + R_{[ji]}). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

После симметрирования тех же уравнений (1) мы получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} R_{(ij)} &= \pi_{(ij)} - p_{(ij)} + ab_{ij}, \\ \rho_{(ij)} &= p_{(ij)} - \pi_{(ij)} + bb_{ij}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

однако хотя каждое из них и разрешимо относительно разности $\pi_{(ij)} - p_{(ij)}$, но они не дают возможности определить каждую из величин $\pi_{(ij)}$ и $p_{(ij)}$ в отдельности. Комбинируя уравнения (3) между собою и с предыдущими уравнениями, мы только получим соотношение

$$\pi_{ij} - p_{ij} = \frac{1}{4} \{2R_{(ij)} - 2\rho_{(ij)} + R_{[ij]} - \rho_{[ij]} + cb_{ij}\}, \quad (4)$$

где

$$c = \frac{1}{2} \tilde{b}^{mn} (\pi_{mn} - p_{mn}) \quad (5)$$

и может быть уничтожено за счет такого выбора положения вершины и основания нормалей, при котором $\tilde{b}^{mn}\pi_{mn} = \tilde{b}^{mn}p_{mn}$. Таким образом, X_2 не определяется заданием одной лишь пары своих внутренних геометрий, если только некоторая комбинация π_{ij} и p_{ij} (например, сумма их симметричных частей) не определяется из остальных условий интегрируемости.

В § 66 было показано, что семейства нормалей, имеющие огибающую, т. е. составляющие развертывающуюся поверхность, в случае P_3 определяются из уравнений

$$(\pi_{ji} - sb_{ji}) du^j = 0, \quad (6)$$

определяющих также *главные линии первого рода*, и, аналогично этому, из уравнений

$$(p_{ji} - sb_{ji}) du^j = 0 \quad (7)$$

для *главных линий второго рода*.

В зависимости от структуры нормализующих конгруэнций могут иметь место следующие случаи:

1. Если нормализующая конгруэнция непараболическая, то соответствующие главные линии образуют сеть.

2. Если эта конгруэнция параболическая, то главные линии образуют одно семейство.

3. Если конгруэнция сводится к связке (для нормалей первого рода) или к плоскому полю (для нормалей второго рода), то главные линии неопределенны, т. е. всякая линия поверхности главная.

Аналитически эти три случая соответствуют таким возможностям:

1. Корни характеристических полиномов систем (6) и (7) различны.

2. Корни совпадают при $\pi_{ji} \neq \lambda b_{ji}$ или при $p_{ji} \neq \lambda b_{ji}$.

3. $\pi_{ji} = \lambda b_{ji}$ или $p_{ji} = \lambda b_{ji}$.

Условием совпадения линий кривизны первого и второго родов между собою будет линейная зависимость

$$\lambda r_{ij} + \mu \pi_{ij} + \nu b_{ij} = 0. \quad (8)$$

Мы будем считать, что это совпадение имеет место и тогда, когда главные линии одного или обоих родов неопределенны.

Если главные линии (например, первого рода) образуют сеть, то характеристическое уравнение имеет различные корни, $s_1 \neq s_2$, а система (6) — различные решения $d_1 u^j$ и $d_2 u^j$. Но в таком случае

$$\pi_{[kl]} d_1 u^k d_2 u^l = (s_2 - s_1) b_{kl} d_1 u^k d_2 u^l,$$

и мы приходим к следующему результату: *для того чтобы главные линии первого рода (второго рода) образовывали сопряженную сеть, необходимо и достаточно, чтобы тензор π_{ij} (p_{ij}) был симметричен*. В случае этой симметрии тензоры сети главных линий имеют вид

$$c_{ij} = b_{(i}^k \pi_{j)k}, \quad \gamma_{ij} = b_{(i}^k p_{j)k}. \quad (9)$$

Согласно определению § 64 мы называем конгруэнцию нормалей первого рода *сопряженной поверхностью*, а

конгруэнцию нормалей второго рода — *гармоничной поверхностью* при условии симметрии тензоров π_{ij} и p_{ij} соответственно.

Если нормализация определяется парой поверхностей и вместе с тем является вполне гармоничной поверхностью, то она определяет на поверхности эквиаффинную пару внутренних связностей, ее средняя связность тоже эквиаффинная и, следовательно, нормализация расслояема в направлении нормалей первого рода и будет вполне гармоничной для каждой из расслояющих поверхностей. Так как для вполне гармоничной нормализации можно положить

$$l_i = \lambda_i = \omega_i = 0,$$

то, поместив вершину нормали первого рода в точку одной из расслояющих поверхностей и получив, как в (70,5),

$$g_i = 0,$$

мы будем иметь вместо условия интегрируемости (65,7CII) условие

$$g^k_{\cdot(i} p_{j)k} = 0,$$

которое с помощью (75,7) приводится к виду

$$b^{km} \pi_{m[i} p_{j]k} = 0,$$

но так как b_{ij} , p_{ij} и π_{ij} симметричны, то последнее условие равносильно существованию линейной зависимости (8), которая обеспечивает совпадение главных линий первого и второго родов. Обратно, если это условие имеет место, то из того же (65,7CII) имеем $\nabla_{[k} g_{j]} = 0$, а это позволит найти σ из (70,2), вследствие чего нормализация определяется парой и расслояется.

Итак, для того чтобы вполне гармоничная нормализация определялась парой поверхностей, необходимо и достаточно, чтобы главные линии первого и второго родов совпадали между собой.

§ 111. Инварианты сопряженной сети

Если сопряженная сеть выбрана за координатную, то в силу условия аполяльности

$$\tilde{a}^{pq} b_{pq} = 0,$$

компонента тензора асимптотической сети

$$b_{12} = \partial_{12}^2 x \xi = 0,$$

следовательно, вектор $\partial_{12}^2 x$ лежит в касательной плоскости и x удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\partial_{12}^2 x = a \partial_1 x + b \partial_2 x + cx. \quad (1)$$

Величины

$$k = ab + c - \partial_1 a, \quad h = ab + c - \partial_2 b, \quad (2)$$

как известно, называются *инвариантами Лапласа — Дарбу* уравнения (1) и играют основную роль в теории этих уравнений.

Предположим теперь, что поверхность нормализована и за нормаль второго рода принято ребро Грина сопряженной сети a_{ij} . В таком случае сеть будет чебышевской первого рода, и, приняв ее за координатную, мы будем иметь, вследствие (95,3),

$$G_{12}^1 = G_{12}^2 = 0,$$

а основные уравнения примут вид

$$\partial_2 y_1 = l_2 y_1 + p_{21} x, \quad \partial_1 y_2 = l_1 y_2 + p_{12} x,$$

или подробнее:

$$\begin{aligned} \partial_{12}^2 x &= l_2 \partial_1 x + l_1 \partial_2 x + (p_{21} + \partial_2 l_1 - l_1 l_2) x = \\ &= l_1 \partial_2 x + l_2 \partial_1 x + (p_{12} + \partial_1 l_2 - l_2 l_1) x. \end{aligned}$$

Составляя выражения инвариантов Дарбу этого уравнения, мы без труда получим

$$H_1 = k = p_{12}, \quad H_2 = h = p_{21}.$$

Так как тензор p_{ij} не зависит от нормирования x , то и инварианты Лапласа не зависят от этого нормирования, а билинейная форма

$$H_{kl} d_1 u^k d_2 u^l = p_{12} d_1 u^1 d_2 u^2 + p_{21} d_1 u^2 d_2 u^1 \quad (3)$$

не зависит также и от выбора параметров вдоль линий сети. Коэффициенты формы (3), или *инвариантной формы первого рода*, соответствующей сети a_{ij} , могут быть записаны в следующем виде, не зависящем от системы координат:

$$2H_{kl} = \tilde{a}^{pq} p_{pq} a_{kl} + \varepsilon^{qp} p_{pq} \varepsilon_{kl}, \quad (4)$$

где $\tilde{a}^{pq}$ — тензор, обратный a_{ij} , а ε_{kl} , ε^{pq} — дискриминантные бивекторы тензора сети a_{ij} . Действительно, выбрав эту сеть за координатную, мы получим

$$H_{11} = H_{22} = 0, \quad H_{12} = p_{12}, \quad H_{21} = p_{21}.$$

До сих пор предполагалось, что нормаль второго рода совпадает с ребром Грина сети a_{ij} . Перейдем теперь к произвольной нормали второго рода. В таком случае прямая $y_i + a_i x$ будет ребром Грина сети a_{ij} , если a_i — ее чебышевский вектор первого рода. При переходе к нормали второго рода, совпадающей с этим ребром, мы будем иметь, согласно (61,5),

$$\bar{p}_{ij} = p_{ij} + \nabla_i a_j - a_i a_j,$$

вследствие чего

$$2H_{kl} = \tilde{a}^{pq} (p_{pq} + \nabla_p a_q - a_p a_q) a_{kl} + \varepsilon^{qp} (p_{pq} + \nabla_p a_q) \varepsilon_{kl}.$$

Обратим все приведенные рассуждения по принципу двойственности и применим их к тангенциальному уравнению поверхности

$$\partial_{12}\xi = \alpha \partial_1 \xi + \beta \partial_2 \xi + \gamma \xi,$$

если сопряженная сеть a_{ij} принята за координатную и имеет тангенциальные инварианты

$$\chi_1 = \kappa = \alpha\beta + \gamma - \partial_1 \alpha, \quad \chi_2 = \chi = \alpha\beta + \gamma - \partial_2 \beta.$$

Получаем следующие результаты:

Инвариантная билинейная форма первого рода сопряженной сети имеет коэффициенты

$$2H_{kl} = (\tilde{a}^{pq} a_{kl} + \varepsilon^{qp} \varepsilon_{kl}) P_{pq}, \quad (5)$$

где

$$P_{ij} = p_{ij} + \nabla_i a_j - a_i a_j, \quad (6)$$

a_{ij} — тензор сопряженной сети, а a_i — ее чебышевский вектор первого рода. Эта форма не зависит от выбора

Инвариантная билинейная форма второго рода сопряженной сети имеет коэффициенты

$$2\chi_{kl} = (\tilde{a}^{pq} a_{kl} + \varepsilon^{qp} \varepsilon_{kl}) \Pi_{pq}, \quad (5')$$

где

$$\Pi_{ij} = \pi_{ij} + \nabla_i \alpha_{(j)} - \alpha_i \alpha_j, \quad (6')$$

a_{ij} — тензор сопряженной сети, а α_i — ее чебышевский вектор второго рода. Эта форма не зависит от выбора

нормализации, а если сеть принята за координатную, то

$$\left. \begin{aligned} H_{12} &= H_1 = k, \\ H_{21} &= H_2 = h, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где k и h — точечные инварианты Дарбу данной сети.

нормализации, а если сеть принята за координатную, то

$$\left. \begin{aligned} \chi_{12} &= \chi_1 = \kappa, \\ \chi_{21} &= \chi_2 = \chi, \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

где κ и χ — тангенциальные инварианты Дарбу данной сети.

§ 112. Внутренние инварианты сопряженной сети

Будем называть *внутренними инвариантами* сопряженной сети такие комбинации ее инвариантов, которые зависят только от элементов внутренних геометрий нормализованной поверхности, т. е. не содержат в своих выражениях тензоров p_{ij} и π_{ij} *).

Прежде всего заметим, что величины $\varepsilon^{sr}P_{rs}$, $\varepsilon^{sr}\Pi_{rs}$ суть внутренние инварианты сети. Действительно, применяя формулы (110,2), мы получим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^{sr}P_{rs} &= \varepsilon^{sr} \left[\nabla_r a_s + \frac{1}{8} (3R_{sr} + \rho_{sr}) \right], \\ \varepsilon^{sr}\Pi_{rs} &= \varepsilon^{sr} \left[\nabla_r \alpha_s + \frac{1}{8} (3\rho_{sr} + R_{sr}) \right], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

так что

$$2H_{[kl]} = \varepsilon^{sr}P_{rs}\varepsilon_{kl}, \quad (2) \qquad 2\chi_{[kl]} = \varepsilon^{sr}\Pi_{rs}\varepsilon_{kl} \quad (2')$$

принадлежат к числу внутренних инвариантов.

Называя оба точечных или оба тангенциальных инварианта *однородными* между собой, мы можем сказать также, что *разности однородных инвариантов сети*

$$H_2 - H_1 = D, \quad (3) \qquad \chi_2 - \chi_1 = \Delta \quad (3')$$

являются *внутренними инвариантами*.

Образуем также инвариантную форму с коэффициентами

$$2\Omega_{ij} = 2(\chi_{ij} - H_{ij}) = [\hat{a}^{sr}a_{ij} + \varepsilon^{sr}\varepsilon_{ij}](\Pi_{rs} - P_{rs}). \quad (4)$$

*) В § 115 будет показано, что внутренние инварианты являются инвариантами проективного изгибания.

Применив формулу (110,4) будем иметь

$$\begin{aligned} 2\tilde{a}^{sr}(\pi_{rs} - p_{rs}) &= \tilde{a}^{sr}(\rho_{rs} - R_{rs}), \\ 4\varepsilon^{sr}(\pi_{rs} - p_{rs}) &= \varepsilon^{sr}(\rho_{sr} - R_{sr}). \end{aligned}$$

С другой стороны, вводя обозначение

$$\sigma_i = \alpha_i - a_i \quad (5)$$

и принимая во внимание выражение чебышевского вектора (98,4), получим

$$\sigma_i = -\frac{1}{2} \tilde{a}^{rs} t_{rs}^k a_{ki}.$$

Кроме того, употребляя $\overset{c}{\nabla}$ как символ дифференцирования в средней связности, придем к соотношениям

$$\nabla_r \alpha_{(s)} = \overset{c}{\nabla}_r \alpha_s - \frac{1}{2} t_{rs}^k \alpha_k, \quad \nabla_r a_s = \overset{c}{\nabla}_r a_s + \frac{1}{2} t_{rs}^k a_k,$$

откуда

$$\begin{aligned} \tilde{a}^{rs}(\nabla_r \alpha_{(s)} - \nabla_r a_s) &= \tilde{a}^{rs} \overset{c}{\nabla}_r \sigma_s - \frac{1}{2} \tilde{a}^{rs} t_{rs}^k (\alpha_k + a_k) = \\ &= \tilde{a}^{rs} \overset{c}{\nabla}_r \sigma_s + \tilde{a}^{rs} (\alpha_r - a_r) (\alpha_s - a_s) = \tilde{a}^{rs} (\overset{c}{\nabla}_r \sigma_s + \alpha_r \alpha_s - a_r a_s) \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\tilde{a}^{rs} (\nabla_r \alpha_{(s)} - \nabla_r a_s - \alpha_r \alpha_s + a_r a_s) = \tilde{a}^{rs} \overset{c}{\nabla}_r \sigma_s;$$

окончательно имеем

$$4\Omega_{kl} = (\tilde{a}^{rs} a_{kl} + \varepsilon^{sr} \varepsilon_{kl}) (\rho_{sr} - R_{sr} + 2\overset{c}{\nabla}_s \sigma_r). \quad (6)$$

Очевидно, форма с коэффициентами Ω_{kl} , а также разности соответствующих разнородных инвариантов

$$\chi_1 - H_1 = \delta_1, \quad \chi_2 - H_2 = \delta_2 \quad (7)$$

являются внутренними инвариантами.

Четыре внутренних инварианта D , Δ , δ_1 , δ_2 связаны соотношением

$$\Delta - D = \delta_2 - \delta_1, \quad (8)$$

поэтому все инварианты H_i и χ_i не могут быть выражены через них.

Для внутренних инвариантов можно найти еще и другие выражения, которые в ряде случаев оказываются более удобными. Рассмотрим, наряду с a_{ij} , сопряженную сеть, аполярную данной. Тензор этой сети

$$c_{ij} = b^k_{.(i} a_{j)k}. \quad (9)$$

Чебышевский вектор первого рода сопряженной сети определяет положение ее ребра Грина, не зависящее от нормализации, и преобразуется при замене по формуле (67,2):

$$\check{a}_i = a_i - p_i, \quad (10)$$

где p_i определяет положение новой нормали второго рода. Имея в виду закон преобразования (10), мы видим, что разность чебышевских векторов первого рода (или второго рода) двух сопряженных сетей не зависит от нормализации. В частности, разность

$$A_i = c_i - a_i \quad (11)$$

зависит только от выбора сети a_{ij} . Но в § 107 (стр. 365) было показано, что разнородные прямые Грина двух аполярных сопряженных сетей сопряжены полярно относительно L_2 , а вследствие этого и согласно (67,4)

$$c_i = \alpha_i + t_i,$$

где t_i — чебышевский вектор асимптотической сети, так что

$$A_i = \alpha_i - a_i + t_i = \sigma_i + t_i, \quad (12)$$

но вследствие этого

$$\begin{aligned} A_i &= -\frac{1}{2} \check{a}^{rs} t_{rs}^k a_{ki} + t_i = \\ &= -\frac{1}{2} \check{a}^{rs} (B^k_{.rs} + 2\delta_r^k t_s + b_{rs} \check{b}^{km} t_m) a_{ki} + t_i, \end{aligned}$$

или

$$A_i = -\frac{1}{2} \check{a}^{rs} B^k_{.rs} a_{ki}, \quad (13)$$

где $B^k_{.rs}$ есть тензор Сегре, не зависящий от нормализации и нормирования.

Пользуясь дискриминантным бивектором ε_{ij} тензора a_{ij} , можно образовать два относительных инварианта:

$$A = \varepsilon^{rs} \partial_s A_r, \quad \check{A} = \varepsilon^{sr} \partial_s (\alpha_r^m A_m), \quad (14)$$

которые аналогичны ротору и дивергенции вектора A_i в метрике с основным тензором a_{ij} .

Рассмотрим, кроме того, чебышевский вектор сети в средней связности

$$\theta_i = \frac{a_i + \alpha_i}{2}$$

и величину

$$B = Q - \varepsilon^{rs} \partial_s \theta_r, \quad (15)$$

где Q есть относительное растяжение в средней метрике. Согласно (100,14) B будет инвариантом замены нормализации, так как эта замена сопровождается конформным преобразованием средней связности, а для сети a_{ij} , ортогональной в этой метрике, $\Gamma_r = \theta_r$ (§ 101, пункт 3).

Если поверхность нормализована с помощью конгруэнций, которые сопряжены и гармоничны поверхности, то внутренние связности эквивалентны, а чебышевский вектор t_i асимптотической сети градиентен, вследствие чего тензоры R_{ij} , ρ_{ij} , $\nabla_j t_i$ симметричны и $Q = 0$, а

$$\varepsilon^{sr} P_{rs} = \varepsilon^{sr} \partial_r a_s = \varepsilon^{sr} \partial_r (\theta_s + \sigma_s) = \varepsilon^{sr} \partial_r (\theta_s + A_s);$$

аналогично,

$$\varepsilon^{sr} \Pi_{rs} = \varepsilon^{sr} \partial_r (\theta_s - A_s).$$

Таким образом,

$$\varepsilon^{sr} P_{rs} = A - B, \quad \varepsilon^{sr} \Pi_{rs} = -(A + B)$$

и коэффициенты внутренних инвариантных форм равны

$$2H_{[kl]} = (A - B) \varepsilon_{kl}, \quad 2\chi_{[kl]} = (A + B) \varepsilon_{kl}, \quad (16)$$

причем эти равенства сохраняют силу для любой нормализации.

Нормализуем поверхность с помощью прямых Грина сети a_{ij} . Ее внутренние геометрии образуют в таком случае конформную пару сопряженных связностей Вейля, общая изотропная сеть которых совпадает с данной сетью (§ 107). Сеть будет декартовой по отношению к обоим связностям, так что ее чебышевские векторы $a_i = \alpha_i = 0$, а тензоры Риччи первого и второго родов выразятся по формулам (92,1), т. е. их симметричные части будут иметь вид

$$R_{(ij)} = K a_{ij}, \quad \rho_{(ij)} = \kappa a_{ij}.$$

Но согласно (98,10) вектор конформного преобразования, связывающего обе геометрии первого и второго родов,

$$p_i = 2t_i,$$

а вследствие (92,4)

$$\kappa = k - 2 \operatorname{div} t = k - 2\varepsilon^{sr} \partial_s (a_r^m t_m) = K - 2\tilde{A},$$

так как согласно (12)

$$t_m = A_m.$$

С другой стороны,

$$\Omega_{kl} = \frac{1}{4} \{ \tilde{a}^{rs} (\kappa a_{rs} - k a_{rs}) a_{kl} + \varepsilon^{sr} (\Pi_{rs} - P_{rs}) \varepsilon_{kl} \},$$

и, следовательно, справедливо равенство

$$\Omega_{kl} = -\frac{1}{2} (\tilde{A} a_{kl} + A \varepsilon_{kl}), \quad (17)$$

которое не зависит от нормализации.

В заключение подсчитаем инварианты A и $\tilde{A}$, предположив, что координаты $u^1 = x$, $u^2 = y$ асимптотические. В таком случае $a_{12} = 0$, и, пронормировав надлежащим образом тензор a_{ij} , мы получим уравнение сопряженной сети в следующем виде:

$$e^\rho dx^2 + e^{-\rho} dy^2 = 0. \quad (18)$$

При этом существенная компонента дискриминантного бивектора определяется из равенства

$$\frac{a}{\varepsilon^2} = 1.$$

Вследствие этого

$$a_1^1 = a_2^2 = 0, \quad a_1^2 = a_{11} = e^\rho, \quad a_2^1 = -a_{22} = -e^{-\rho}.$$

Координаты вектора A_i определяются согласно (13) и (96,18):

$$A_1 = -\frac{1}{2} \tilde{a}^{22} a_{11} B_{.22}^1 = e^{2\rho} \gamma, \quad A_2 = e^{-2\rho} \beta,$$

откуда без труда получаем

$$\left. \begin{aligned} A &= \varepsilon^{rs} \partial_s A_r = \partial_y (e^{2\rho} \gamma) - \partial_x (e^{-2\rho} \beta), \\ \tilde{A} &= \varepsilon^{sr} \partial_s (a_r^m A_m) = \partial_x (e^\rho \gamma) + \partial_y (e^{-\rho} \beta). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

§ 113. Специальные сопряженные сети

1. Сети равных инвариантов. При равенстве нулю чебышевского вектора a_i сопряженной сети согласно (111,6) условия симметрии обоих тензоров H_{kl} и P_{kl} равносильны. Но одно из них выражает равенство точечных инвариантов, а другое — гармоничность конгруэнции нормалей второго рода, которые совпадают при $a_i = 0$ с ребром Грина сети. Итак:

Для того чтобы сопряженная сеть имела равные точечные инварианты, необходимо и достаточно, чтобы конгруэнция ребер Грина этой сети была гармонична поверхности.

Для того чтобы сопряженная сеть имела равные тангенциальные инварианты, необходимо и достаточно, чтобы конгруэнция осей Грина этой сети была сопряжена поверхности.

Признак такой сети имеет вид

$$H_{[kl]} = 0, \quad (1)$$

$$\chi_{[kl]} = 0, \quad (1')$$

или

$$A - B = 0, \quad (2)$$

$$A + B = 0, \quad (2')$$

или

$$D = H_2 - H_1 = 0, \quad (3)$$

$$\Delta = \chi_2 - \chi_1 = 0. \quad (3')$$

Этот признак зависит только от внутренних связностей.

Примером рассматриваемой сети может служить координатная сеть поверхности

$$x = U(u^1) + V(u^2), \quad \xi = U(u^1) + V(u^2),$$

инварианты которой равны нулю.

2. Изотермически сопряженные сети являются изотермически ортогональными по отношению к средней метрике, так что признак такой сети имеет вид

$$Q - \operatorname{rot} \theta = 0, \quad (4)$$

где θ — чебышевский вектор сети по отношению к средней метрике, или

$$B = 0 \quad (5)$$

и, следовательно, такую сеть характеризует и условие

$$D + \Delta = 0, \quad (6)$$

или

$$\chi_1 - \chi_2 + H_1 - H_2 = 0, \quad (7)$$

или, наконец,

$$H_{[kl]} + \chi_{[kl]} = 0. \quad (8)$$

3. С е т и И о н а с а — это такие сети, которые имеют одновременно равные точечные и равные тангенциальные инварианты. Согласно пункту 1 *сеть Ионаса характеризуется тем, что ее оси и ребра Грина образуют конгруэнции, сопряженные и гармоничные поверхности.*

Сравнивая признаки (2), (2'), (6), (7), мы приходим к следующему заключению: *если выполнены два из трех следующих признаков:*

- а) *сеть имеет равные точечные инварианты ($D = 0$),*
 - б) *сеть имеет равные тангенциальные инварианты ($\Delta = 0$),*
 - с) *сеть изотермически сопряженная ($D + \Delta = 0$),*
- то выполнен и третий, и сеть является сетью Ионаса.*

Так как прямая Грина сопряженной сети, аполярной сети Ионаса, взаимна прямым Грина этой сети (§ 107), а сопряженность и гармоничность переходят друг в друга при полярном преобразовании относительно L_2 (§ 65), то мы имеем следующую теорему: *сопряженная сеть, аполярная сети Ионаса, есть тоже сеть Ионаса.*

Относя поверхность к асимптотической сети и принимая во внимание, что сеть Ионаса является изотермически сопряженной, мы можем записать ее уравнение в таком виде:

$$\sigma dx^2 + dy^2 = 0 \quad (\sigma = \pm 1),$$

и тогда второе условие, характеризующее сеть, примет вид

$$A = \partial_y \gamma - \partial_x \beta = 0. \quad (9)$$

Величины β и γ не зависят от нормализации; следовательно, *поверхности, допускающие существование сетей Ионаса, образуют особый класс. Эти поверхности называются поверхностями Ионаса.*

Примером поверхности Ионаса может служить поверхность с *двойной сетью Кёнигса*. *Сетью Кёнигса* называется сеть, образованная семейством линий, которые получены от пересечения поверхности плоскостями некоторого пучка и линиями прикосновения к той же поверхности конических поверхностей с вершинами на оси пучка. Сеть Кёнигса является сопряженной, так как конусы суть развертывающиеся поверхности. Если семейство конических линий тоже может быть получено как семейство сечений плоскостями, принадлежащими другому пучку, то сеть Кёнигса называется *двойной*. Конгруэнции касательных к линиям обоих семейств двойной сети Кёнигса имеют своими фокальными многообразиями прямые — оси пучков. Следовательно, поверхность принадлежит к типу поверхностей с нулевыми инвариантами, рассмотренных нами в § 107 и отмеченных в пункте 1 настоящего параграфа. Но понятие двойной сети Кёнигса двойственно само себе, и, следовательно, ее тангенциальные инварианты тоже равны нулю, так что она является сетью Ионаса. Простейшим примером двойной сети Кёнигса может служить сеть меридианов и параллелей *поверхности вращения*, которая будет вследствие этого поверхностью Ионаса.

Минимальные поверхности пространств постоянной кривизны будут тоже поверхностями Ионаса, так как прямые Грина из изотропной сети, которая сопряжена, совпадают с метрическими нормальными, следовательно, сопряжены и гармоничны поверхности.

Согласно приведенной выше теореме *сеть линий кривизны на минимальных поверхностях тоже является сетью Ионаса*.

4. *Р а с с л о я ю щ и е с е т и*. Если поверхность нормализована прямыми Грина сопряженной сети a_{ij} , то на ней определяется сопряженная конформная пара геометрий Вейля с общей изотропной сетью a_{ij} . Так как чебышевский вектор этой сети равен нулю, то вектор (112,11)

$$A_i = c_i, \quad (10)$$

т. е. равен чебышевскому вектору сети c_{ij} , которая аполярна данной, т. е. является ортогональной по отношению к внутренним связностям. Но в таком случае

$$\tilde{A} = \operatorname{div} a = \operatorname{div} c,$$

или, в силу (101,12),

$$\tilde{A} = K,$$

где K — инвариант, характеризующий внутреннюю вейлеву связность первого рода.

Обращение в нуль этого инварианта равносильно кривой симметрии тензора Риччи первого рода, что в свою очередь характеризует квазиевклидову геометрию или, согласно § 109, расслояемость нормализующих конгруэнций в направлении нормали второго рода.

Сопоставляя эти результаты, мы приходим к следующему заключению: *для того чтобы сопряженная сеть удовлетворяла условию*

$$\tilde{A} = 0, \quad (11)$$

необходимо и достаточно, чтобы пара конгруэнций, образованных ее прямыми Грина, была расслояема в направлении ребра Грина. Исходя из этого факта, мы будем называть такие сопряженные сети расслояющими.

Согласно (112,17) признаку расслояющей сети можно придать также вид

$$\Omega_{(kl)} = \chi_{(kl)} - H_{(kl)} = 0, \quad (12)$$

что равносильно соотношениям

$$\delta_1 + \delta_2 = 0, \quad (13)$$

$$\chi_1 + \chi_2 = H_1 + H_2. \quad (14)$$

Таким образом, *расслояющая сеть характеризуется равенством сумм точечных и тангенциальных инвариантов. Признак расслояющей сети зависит только от внутренних инвариантов.*

В асимптотических координатах признак (11) принимает вид

$$\tilde{A} = \partial_x (e^\rho \gamma) + {}^* \partial_y (e^{-\rho} \beta) = 0 \quad (15)$$

и дает дифференциальное уравнение первого порядка для нахождения функции ρ , определяющей сеть по формуле (112,18):

$$e^\rho dx^2 + e^{-\rho} dy^2 = 0.$$

Таким образом, *на всякой поверхности существует бесконечное множество расслояющих сетей, совокупность*

которых зависит от одной произвольной функции одного аргумента. В частности, на линейчатой поверхности асимптотическая сеть является полугеодезической и, например, $\gamma = 0$, вследствие чего уравнение (15) имеет решение

$$\rho = \ln \beta + X, \quad (16)$$

где X — произвольная функция одного x .

Поверхность второго порядка характеризуется условиями $\beta = \gamma = 0$, а это значит, что всякая сопряженная сеть на поверхности второго порядка — расслояющая.

5. С е т и R суть изотермические расслояющие сети. Их характеристику получим, сравнив признаки

$$D + \Delta = 0, \quad \delta_1 + \delta_2 = 0, \quad (17)$$

откуда

$$H_1 = \chi_2, \quad H_2 = \chi_1, \quad (18)$$

так что сеть R характеризуется равенством не соответствующих разнородных инвариантов.

В асимптотической системе координат уравнение изотермической сети R может быть приведено к виду

$$\sigma dx^2 + dy^2 = 0, \quad \sigma = \pm 1,$$

вследствие чего второй признак сводится к равенству

$$\partial_x \gamma + \sigma \partial_y \beta = 0, \quad (19)$$

которое показывает, что поверхности, допускающие существование сети R , образуют особый класс. Эти поверхности называются поверхностями R .

Примером поверхности R может служить всякая поверхность с двойной сетью Кёнигса и, в частности, поверхность вращения, так как все инварианты двойной сети Кёнигса равны нулю и она является сетью R . Поверхности второго порядка тоже могут быть причислены к классу поверхностей R , ибо всякая изотермическая сеть такой поверхности расслояющая и, следовательно, — сеть R .

§ 114. Особые евклидовы нормализации

Вопрос о том, определяет ли задание внутренних связностей гиперповерхность проективного пространства, был решен нами положительно для пространства с числом измерений, превосходящим три, и остался открытым для поверхностей X_2 в P_3 . В частности, мы показали, что пара

евклидовых внутренних связностей характеризует гиперповерхность, нормализованную с помощью связки. Начнем теперь с исследования вопроса о таких нормализациях, которые определяют на X_2 пару евклидовых связностей, называя их просто *евклидовыми* или $E(X_2)$.

Далее мы увидим, что изучение евклидовых нормализаций позволит ответить на общий вопрос, поставленный в начале этого параграфа.

Рассмотрим $E(X_2)$ в P_3 . Так как евклидовы связности эквивалентны, то *нормализующие конгруэнции сопряжены и гармоничны поверхности* (§ 66). С другой стороны, евклидова связность является частным случаем квазиевклидовой, поэтому *пара нормализующих конгруэнций $E(X_2)$ расслояема в направлении нормали второго рода* (§ 109). Наконец, $R_{ij} = \rho_{ij} = 0$ и условия (110,4), принимая вид

$$\pi_{ij} - \rho_{ij} = \lambda b_{ij}, \quad (1)$$

показывают, что главные линии $E(X_2)$ совпадают между собой, вследствие чего *нормализующие конгруэнции $E(X_2)$ образуют пару, которая расслояема также и в направлении нормали первого рода* (§ 110).

Перемещая вершину и основание нормалей так, чтобы выполнялись условия

$$b^{ij}\rho_{ij} = b^{ij}\pi_{ij} = 0, \quad (2)$$

мы заменим условия (1) условием

$$\pi_{ij} = \rho_{ij}, \quad (3)$$

а в силу соотношений (65,12) и (65,13) при этом и

$$\Omega = 0. \quad (4)$$

Из (65,5) получим также

$$\gamma_j^k b_{ki} = g_j^k b_{ki} = \rho_{ij} \quad (5)$$

и, пользуясь перебрасыванием индексов с помощью дискриминантного бивектора тензора b_{ij} , будем иметь

$$\gamma_{jk} = g_{jk} = b_j^l \rho_{il}. \quad (6)$$

Обратим внимание, что, в силу симметрии тензора ρ_{ij} и условий (2), тензор $g_{ij} = \gamma_{ij}$ также симметричен, после чего становится очевидным его совпадение с тензором

c_{ij} , так что согласно (110,9) главные линии определяются уравнением

$$g_{ij} du^i du^j = 0. \quad (7)$$

Запишем теперь те из условий интегрируемости (66,5), которые не выполняются тождественно в силу предыдущих соотношений. Они сведутся к следующим:

$$\left. \begin{array}{ll} \nabla_{[k} b_{j]i} = 0, & \text{(II)} \quad \nabla_{[k} b_{j](i)} = 0, \quad \text{(II')} \\ \nabla_{[k} p_{j]i} = -g_{[k} b_{j]i}, & \text{(III)} \quad \nabla_{[k} p_{j](i)} = -\gamma_{[k} b_{j]i}, \quad \text{(III')} \end{array} \right\} \text{(B)}$$

$$\left. \begin{array}{ll} \nabla_{[j} g_{i]}^k + g_{[i} \delta_{j]}^k = 0, & \text{(I)} \quad \nabla_{[j} g_{i]}^{(k)} + \gamma_{[i} \delta_{j]}^k = 0, \quad \text{(I')} \\ \nabla_{[j} g_{i]} = 0, & \text{(II)} \quad \nabla_{[j} \gamma_{i]} = 0. \quad \text{(II')} \end{array} \right\} \text{(C)}$$

(8)

Условия (8BII), (8BII') — простые следствия сопряженности и эквивалентности средней метрики. Вводя символ ковариантного дифференцирования в средней метрике и складывая между собой условия (8BIII) и (8CI), получим следующие соотношения:

$$\overset{c}{\nabla}_{[k} p_{j]i} = -S_{[k} b_{j]i}, \quad \text{(a)} \quad \overset{c}{\nabla}_{[k} g_{j]}^r = S_{[k} \delta_{j]}^r, \quad \text{(b)}$$

где $2S_k = g_k + \gamma_k$. Пользуясь тем, что b_{ij} и его дискриминантный бивектор ковариантно постоянны, мы получим

$$b^{ri} \overset{c}{\nabla}_{[k} p_{j]i} = \overset{c}{\nabla}_{[k} (p_{j]i} b^{ir}) = \overset{c}{\nabla}_{[k} g_{j]}^r = -S_{[k} \delta_{j]}^r,$$

что при сравнении с условиями (b) дает

$$S_k = 0,$$

т. е. условия (a) и (b) оказываются равносильными. Комбинируя с помощью вычитания условия (8BIII) и (8CI), мы придем к одному условию:

$$2g_{[j} \delta_{i]}^k = -t_{r[j}^k g_{i]}^r.$$

Но так как при свертывании число уравнений не уменьшится, то это последнее равносильно следующему:

$$2g^k = -t_{.r.}^{k.s} g_s^r = t_{.rs}^k g^{rs}.$$

Средняя метрика евклидовой пары риманова и $\overset{c}{\nabla}_k \varepsilon_{ij} = 0$; поэтому (8CII) будет равносильно условию $\overset{c}{\nabla}_k g^k = 0$,

и, окончательно, вся система условий (8) сведется к таким трем уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} b_{kl}g^{kl} &= 0, & (a) \\ \overset{c}{\nabla}_k g^{ki} &= 0, & (b) \\ \overset{c}{\nabla}_k (t^k_{rs}g^{rs}) &= 0, & (c) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где b_{ij} есть основной тензор средней метрики, являющейся метрикой Римана.

Таким образом, для нахождения $E(X_2)$ с данной парой сопряженных евклидовых связностей нужно найти симметричный тензор g^{ij} , удовлетворяющий системе уравнений (9).

Система (9), очевидно, удовлетворится при $g^{ij} = 0$; следовательно, всякая евклидова пара сопряженных связностей может быть реализована как пара внутренних связностей на некоторой $N(X_2)$. Характер нормализации в этом случае очевиден. Действительно, главные линии первого и второго родов оказываются неопределенными, а это значит, что нормали первого рода принадлежат связке, а нормали второго рода — плоскому полю. Кроме того, внутренняя геометрия первого рода совпадает с геометрией нормализованной связки нормалей первого рода, но эта геометрия евклидова, следовательно, нормализующая плоскость связки одна. Поэтому плоскость, содержащая нормали второго рода, проходит через центр связки нормалей первого рода. Таким образом, при $g^{ij} = 0$ мы приходим для $X_2 \in P_3$ к такой нормализации, которая выше рассматривалась в случае X_n в P_{n+1} (§ 62). Мы будем называть такую $E(X_2)$ *неособой*. Если же тензор g^{ij} , удовлетворяющий системе (9), отличен от нуля, то $E(X_2)$ — *особая*.

Чтобы удобнее исследовать последний случай, преобразуем условие (9с), вводя в него вместо t^i_{jk} тензор B^i_{jk} , не зависящий от нормализации. Пользуясь формулой (9б, 11) и принимая во внимание равенства (9а), (9б), мы получим

$$\overset{c}{\nabla}_k (t^k_{rs}g^{rs}) = \overset{c}{\nabla}_k (B^k_{rs}g^{rs}) + 2\overset{c}{\nabla}_k g^{rs}t_r = \overset{c}{\nabla}_k (B^k_{rs}g^{rs}) + 2g^{rk}\overset{c}{\nabla}_k t_r.$$

Но так как тензоры кривизны внутренних связностей равны нулю, то согласно (35, 10)

$$\overset{c}{\nabla}_r t^r_{ij} - \overset{c}{\nabla}_i t^r_{rj} = \overset{c}{\nabla}_r t^r_{ij} - 4\overset{c}{\nabla}_i t_j = 0,$$

или

$$\overset{c}{\nabla}_r B^r_{.ij} + 2\overset{c}{\nabla}_i t_j + b_{ij} b^{mn} \overset{c}{\nabla}_m t_n - 4\overset{c}{\nabla}_i t_j = 0,$$

откуда

$$2g^{ij} \overset{c}{\nabla}_i t_j = g^{ij} \nabla_r B^r_{.ij},$$

так что

$$\overset{c}{\nabla}_k (t^k_{.rs} g^{rs}) = \overset{c}{\nabla}_k (B^k_{.rs} g^{rs}) + g^{rs} \overset{c}{\nabla}_k B^k_{.rs} = 0,$$

или

$$2\overset{c}{\nabla}_k (B^k_{.rs} g^{rs}) = B^k_{.rs} \overset{c}{\nabla}_k g^{rs}. \quad (10)$$

Отнесем поверхность к асимптотическим координатам. В таком случае мы будем иметь, согласно (96,18) и (96,18'),

$$\begin{aligned} b_{11} = b_{22} = 0, \quad b_{12} = \varphi \neq 0, \\ B^1_{.11} = B^2_{.22} = B^1_{.12} = B^2_{.21} = 0, \quad B^1_{.22} = -2\gamma, \quad B^2_{.11} = -2\beta, \\ g^{12} = 0 \end{aligned}$$

и, если обозначить $g^{11} = m$, $g^{22} = n$, $B^i = -\frac{1}{2} B^i_{.rs} g^{rs}$, то

$$B^1 = \gamma n, \quad B^2 = \beta m.$$

Но в асимптотических координатах для коэффициентов средней связности, которая будет связностью Римана, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^2_{11} = \mathcal{C}^1_{22} = \mathcal{C}^1_{12} = \mathcal{C}^2_{21} = 0, \\ \mathcal{C}^1_{11} = \partial_1 \ln \varphi, \quad \mathcal{C}^2_{22} = \partial_2 \ln \varphi, \end{aligned}$$

вследствие чего

$$\overset{c}{\nabla}_k B^k = \partial_1 \gamma n + \gamma (\partial_1 n + \mathcal{C}^1_{11} n) + \partial_2 \beta m + \beta (\partial_2 m + \mathcal{C}^2_{22} m),$$

а

$$B^k_{.rs} \overset{c}{\nabla}_k g^{rs} = -2 (\beta \partial_2 m + \gamma \partial_1 n),$$

и условие (10) принимает вид

$$2 (\partial_1 \gamma n + \partial_2 \beta m) + \gamma (\partial_1 n + 2\mathcal{C}^1_{11} n) + \beta (\partial_2 m + 2\mathcal{C}^2_{22} m) = 0.$$

Но

$$\overset{c}{\nabla}_k g^{ki} = 0,$$

откуда

$$\overset{c}{\nabla}_1 g^{11} + \overset{c}{\nabla}_2 g^{21} = \partial_1 m + 2\mathcal{Z}_{11}^1 m = \partial_1 m + 2m \partial_1 \ln \varphi = 0$$

и, аналогично,

$$\overset{c}{\nabla}_1 g^{12} + \overset{c}{\nabla}_2 g^{22} = \partial_2 n + 2\mathcal{Z}_{22}^2 n = \partial_2 n + 2n \partial_2 \ln \varphi = 0,$$

так что

$$n = X(x) \varphi^{-2}, \quad m = Y(y) \varphi^{-2},$$

или, после соответствующего изменения параметризации,

$$n = a\varphi^{-2}, \quad m = b\varphi^{-2},$$

где a и b — постоянные. При такой параметризации из (10) окончательно получаем

$$a \partial_x \gamma + b \partial_y \beta = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь два возможных случая, которые могут иметь место для особой евклидовой нормализации.

А) *Существует единственная сеть главных линий.* В таком случае тензор g_{ij} является тензором сопряженной сети, $m \neq 0$, $n \neq 0$, а следовательно, можно положить $a = \sigma = \pm 1$, $b = 1$, так что уравнение сети примет вид

$$\sigma dx^2 + dy^2 = 0,$$

а условие (11) сведется к равенству

$$\partial_x \gamma + \sigma \partial_y \beta = 0,$$

сравнивая которое с (113,19) мы приходим к следующему результату: *если главные линии особой евклидовой нормализации образуют сеть, то она является сетью R , и, следовательно, только поверхности R допускают особую евклидову нормализацию с главными линиями, образующими сеть.*

В) *Главные линии особой евклидовой нормализации образуют единственное семейство.* В таком случае следует положить, например, $g^{11} = m = 0$, $g^{22} = n \neq 0$, а это значит, что главные линии совпадают с асимптотическими линиями одного семейства. Условие (11) принимает вид

$$\partial_x \gamma = 0$$

и характеризует класс поверхностей, которые называются *поверхностями R_0* *). Таким образом, *только поверхности*

*) Линейчатые поверхности можно считать принадлежащими классу R_0 , ибо они характеризуются условием $\gamma = 0$.

R_0 допускают особую евклидову нормализацию с главными линиями, образующими одно семейство. Итак, для того чтобы поверхность допускала особую евклидову нормализацию, необходимо и достаточно, чтобы она была или поверхностью R , или поверхностью R_0 .

В заключение рассмотрим поверхность постоянной гауссовой кривизны в пространстве постоянной кривизны. Ее внутренняя геометрия будет проективно-евклидовой и эквиаффинной, и, следовательно, нормаль второго рода можно подвергнуть такому преобразованию, после которого внутренняя геометрия первого рода станет евклидовой. Внутренняя геометрия второго рода не утратит своей эквиаффинности, т. е. тоже станет евклидовой. Однако главные линии нормализации до и после преобразования будут совпадать с линиями кривизны поверхности постоянной кривизны и, следовательно, образуют сопряженную сеть, которая, согласно предыдущему заключению, будет сетью R . Таким образом, поверхности постоянной гауссовой кривизны пространства S_3 принадлежат к классу поверхностей R .

§ 115. Проективное изгибание

В § 69 было введено понятие линейного элемента гиперповерхности

$$ds = \frac{D_{ijk} du^i du^j du^k}{b_{rs} du^r du^s}$$

и показано, что в P_{n+1} при $n > 2$ задание линейного элемента определяет гиперповерхность с точностью до проективного преобразования. Мы увидим далее, что этот результат не может быть распространен на случай $n = 2$, т. е. поверхности X_2 в P_3 с одинаковыми линейными элементами могут быть проективно-различными. Вследствие этого имеет смысл следующее определение: две поверхности в P_3 , между точками которых можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором их линейные элементы совпадают для соответствующих направлений, называются проективно-наложимыми.

В том же § 69 было показано, что при любом n задание линейного элемента определяет пару внутренних связностей с точностью до составного преобразования, а это зна-

чит, что если поверхности S и $'S$ проективно-наложимы, то всякой нормализации одной из них соответствует такая нормализация второй, при которой внутренние связности обеих поверхностей совпадают между собой. Обратно, если каждую из двух поверхностей S и $'S$ можно нормализовать так, чтобы пары их внутренних геометрий были тождественны между собой, т. е. чтобы при соответствующей параметризации имели место равенства

$$G_{ij}^k = 'G_{ij}^k, \quad \Gamma_{ij}^k = '\Gamma_{ij}^k, \quad b_{ij} = \lambda' b_{ij},$$

то их линейные элементы совпадают и, значит, поверхности наложимы *).

Итак, для того чтобы поверхности были проективно-наложимы, необходимо и достаточно, чтобы каждую из них можно было нормализовать так, чтобы пары внутренних геометрий, соответствующих этим нормализациям, совпадали между собой.

Называя равносильными такие нормализации двух поверхностей, которые определяют на них тождественные пары внутренних геометрий, мы будем иметь также, что всякой нормализации данной поверхности S соответствует равносильная ей нормализация поверхности $'S$, наложимой на данную.

Предположим теперь, что на поверхности S установлена неособая евклидова нормализация; ей будет соответствовать равносильная и, значит, тоже евклидова нормализация поверхности $'S$. Если эта последняя не будет особой, то мы имеем одновременно для обеих поверхностей $p_{ij} = 0$, $'p_{ij} = 0$, что при условии имеющего место совпадения внутренних геометрий гарантирует совпадение поверхностей S и $'S$, с точностью до проективного преобразования. Таким образом, если возможна проективная наложимость проективно-различных поверхностей, то поверхности эти должны допускать особую евклидову нормализацию. Следовательно, проективное изгибание возможно только для поверхностей R и R_0 .

*) Для совпадения пар внутренних геометрий необходимо и достаточно, собственно говоря, чтобы выполнилось одно из первых условий и последнее, ибо третье выполнится тогда в силу сопряженности. Нужно заметить, однако, что первые два равенства не влекут за собой третьего в случае конформной пары. Поэтому, говоря о совпадении пар внутренних геометрий, мы будем подразумевать, что и базисные сети совпадают.

Докажем также, что всякая поверхность S , принадлежащая указанным классам, изгибаема. Для этого установим на S неособую евклидову нормализацию и рассмотрим поверхность $'S$ с той же парой внутренних геометрий, что и у данной, но в остальном определяющуюся тензором $g_{ij} \neq 0$, который, однако, удовлетворяет системе условий интегрируемости (114,9).

Покажем теперь, что $'S$ отлична от S . Предполагая противное, мы допускаем возможность совмещения поверхностей всеми их соответствующими точками с помощью некоторого проективного преобразования. Но при таком преобразовании, вследствие совпадения внутренних геометрий, совместятся и все геодезические линии первого рода на обеих поверхностях и, следовательно, совместятся и их нормали первого рода, так как они являются осями Грина геодезических сетей. Однако такое совмещение нормалей невозможно, так как нормали поверхности S образуют связку, а конгруэнция нормалей поверхности $'S$ имеет, самое большее, два семейства развертывающихся поверхностей. Полученное противоречие показывает, что *всякая поверхность R или R_0 изгибаема проективно*.

Таким образом, теорема, доказанная в § 65, имеет место для P_3 в ослабленном виде: *всякая поверхность X_2 в P_3 вполне определяется заданием пары своих внутренних связностей, если она не принадлежит классу R или R_0* .

§ 116. Линии Сегре и Дарбу

Тензоры B^i_{jk} и $D_{ijk} = b_{ir}B^r_{jk}$ внутренних связностей нормализованной поверхности не изменяются при составных преобразованиях этих связностей и, следовательно, не зависят от нормализации, а определяются самой поверхностью. Линии этой поверхности, определяемые уравнениями

$$B_{ijk}du^idu^jdu^k = 0, \quad D_{ijk}du^idu^jdu^k = 0, \quad (1)$$

тоже не зависят от нормализации и называются *линиями Сегре* и *линиями Дарбу* этой поверхности. Вследствие симметрии тензоров B_{ijk} и D_{ijk} , а также вследствие условия аполярности, согласно которому

$$b^{ij}D_{ijk} = 0, \quad (2)$$

линии Сегре и линии Дарбу попарно сопряжены между собой и образуют три сопряженные сети, принадлежащие одному пучку, который мы будем называть пучком Дарбу. Все эти шесть линий совпадают между собой и с асимптотической линией тогда и только тогда, когда эта асимптотическая линия является геодезической линией внутренних геометрий, а это характеризует линейчатые поверхности. Признак этих поверхностей, согласно (98,8), имеет вид $I = 0$. Если же

$$I = \frac{1}{2} \tilde{b}^{rs} L_{.nr}^m B_{.ms}^n \neq 0, \quad (3)$$

то, согласно (21,8),

$$I b_{ij} = B_{.ni}^m B_{.mj}^n, \quad (4)$$

$$D_{.mn}^k B_{..j}^{nm} = \sigma I \delta_j^k. \quad (5)$$

Условие (4) определяет b_{ij} , и, принимая во внимание результат предыдущего параграфа, мы приходим к следующей теореме: *нелинейчатая поверхность определяется с точностью до проективного изгибания заданием тензора Сегре B_{jk}^i .*

Сопряженные сети пучка Дарбу являются ортогональными сетями средней связности и имеют, согласно теореме пункта 7 § 98, одинаковые чебышевские векторы θ_k по отношению к этой связности. Поэтому для всякого вектора a^i , касающегося любой линии Сегре, мы будем иметь, согласно (100,5),

$$\overset{c}{\nabla}_k a^i = -\sigma \tilde{\theta}_k \tilde{a}^i + \lambda_k a^i.$$

Дифференцируя условие

$$B_{ijk} a^i a^j a^k = 0, \quad (a)$$

мы получим

$$\overset{c}{\nabla}_r B_{ijk} a^i a^j a^k - 3\sigma \tilde{\theta}_r B_{ijk} \tilde{a}^i a^j a^k =$$

$$= (\overset{c}{\nabla}_r B_{sjk} + 3\sigma \tilde{\theta}_r B_{.jk}^i b_{is}) a^s a^j a^k =$$

$$= (\overset{c}{\nabla}_r B_{sjk} + 3\sigma \tilde{\theta}_r D_{sjk}) a^s a^j a^k = 0. \quad (b)$$

Так как соотношение (b) справедливо для любого из трех векторов, удовлетворяющих условию (a), то из него

следует

$$\left. \begin{aligned} \overset{c}{\nabla}_r B_{ijk} &= -3\sigma\tilde{\theta}_r D_{ijk} + \mu_r B_{ijk}, \\ \overset{c}{\nabla}_r B^i_{.jk} &= -3\sigma\tilde{\theta}_r D^i_{.jk} + \mu_r B^i_{.jk}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Найдем некоторые соотношения, вытекающие из (6).
Прежде всего

$$\overset{c}{\nabla}_r B^r_{.jk} = -3\sigma\theta^s b_{sr} D^r_{.jk} + \mu_r B^r_{.jk},$$

или, согласно (21,6),

$$\overset{c}{\nabla}_r B^r_{.jk} = (\mu_r - 3\theta_r) B^r_{.jk}, \quad (7)$$

откуда, согласно (5),

$$\overset{c}{\nabla}_r B^r_{.mn} D^{mn}_{..i} = (\mu_r - 3\theta_r) B^r_{.mn} D^{mn}_{..i} = \sigma I (\mu_i - 3\theta_i),$$

так что

$$z_i = 3\theta_i - \mu_i = -\frac{\sigma}{I} D^{mn}_{..i} \overset{c}{\nabla}_r B^r_{.mn}. \quad (8)$$

Дифференцируя выражение (3) и помня, что

$$\overset{c}{\nabla}_k \tilde{b}^{ij} = -2\omega_k \tilde{b}^{ij}, \quad (9)$$

получим

$$\begin{aligned} 2\partial_k I &= -2\omega_k \tilde{b}^{rs} B^m_{.nr} B^n_{.ms} + 2\tilde{b}^{rs} \overset{c}{\nabla}_k B^n_{.ms} B^m_{.nr} = \\ &= -4\omega_k I + 2\tilde{b}^{rs} (-3\sigma\tilde{\theta}_k D^n_{.ms} + \mu_k B^n_{.ms}) B^m_{.nr} = 4I (\mu_k - \omega_k), \end{aligned}$$

откуда

$$\mu_k = \frac{1}{2} \partial_k \ln I + \omega_k; \quad (10)$$

следовательно, чебышевский вектор сопряженной сети, принадлежащий пучку Дарбу, вычисленный по отношению к средней связности, выражается так:

$$\theta_i = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \partial_i \ln I + \omega_i - \frac{\sigma}{I} D^{mn}_{..i} \overset{c}{\nabla}_r B^r_{.mn} \right]. \quad (11)$$

§ 117. Канонический пучок

1. О с и Ч е х а. Так как все сети пучка Дарбу имеют одинаковые чебышевские векторы, равные θ_i , то все они имеют также общие средние прямые Грина, которые,

согласно (106,2), выражаются векторами

$$c_i = \theta_i + \frac{t_i}{2}, \quad \gamma_i = \theta_i - \frac{t_i}{2}. \quad (1)$$

Эти прямые называются *осями Чеха* поверхности. По самому своему определению они не зависят от нормализации и сопряжены полярно относительно поверхности.

Если нормализующие прямые поверхности совпадают с осями Чеха, то средняя метрика будет квазиевклидовой, а все линии Дарбу и Сегре будут геодезическими линиями этой метрики, так как они совпадут с линиями трех декартовых сетей (см. § 106). Но, кроме того, нормали взаимны, поэтому

$$B^i_{.jk} = t^i_{.jk},$$

и линии Сегре будут нулевыми линиями тензора t_{ijk} , т. е. линиями t пары внутренних геометрий. Но, будучи одновременно линиями t и геодезическими средней метрики, они будут также и геодезическими первого и второго родов (§ 97).

Принимая это во внимание и учитывая свойства геодезических, изложенные в § 105, мы приходим к следующим двум двойственным теоремам:

Соприкасающиеся плоскости трех линий Сегре пересекаются по одной прямой, которая совпадает с осью Чеха первого рода.

Фокальные точки трех направлений Сегре лежат на одной прямой, которая совпадает с осью Чеха второго рода.

2. **П р о е к т и в н ы е н о р м а л и.** Согласно определению, приведенному в § 69, *проективными нормальми* называются такие прямые, сопряженные полярно относительно поверхности X_2 , которые определяют на поверхности среднюю риманову метрику с основным тензором b_{ij} , удовлетворяющим условию

$$I = \text{const.} \quad (*)$$

Так как нормализующие конгруэнции взаимны, а средняя метрика риманова, то из этого определения непосредственно вытекает, что проективные нормали образуют конгруэнции, одна из которых сопряжена, а другая гармонична поверхности (§ 67).

Чтобы определить положение проективных нормалей поверхности, нормализованной произвольно, рассмотрим векторы

$$n_k = \frac{1}{2} \partial_k \ln I + \omega_k + \frac{t_k}{2}, \quad (2)$$

$$v_k = \frac{1}{2} \partial_k \ln I + \omega_k - \frac{t_k}{2}. \quad (2')$$

Заметим, прежде всего, что эти векторы остаются неизменными при перенормировании основного тензора средней метрики. Действительно, полагая

$$'b_{ij} = \lambda^2 b_{ij},$$

мы получим

$$\partial_k \ln 'I = \partial_k \ln I - 2\partial_k \ln \lambda.$$

Но, согласно (50,8), при этом же перенормировании

$$' \omega_k = \omega_k + \partial_k \ln \lambda,$$

откуда и следует справедливость утверждения.

Предположим теперь, что нормализация подвергается преобразованию, соответствующему составному преобразованию внутренних связностей с символом (p_i, π_i) . В таком случае, согласно (52,3), (52,4) и (52,7),

$$' \omega_k = \omega_k - \sigma_k = \omega_k - \frac{\pi_k + p_k}{2},$$

$$' t_k = t_k + \pi_k - p_k,$$

и мы имеем для векторов (2) закон преобразования

$$' n_k = n_k - p_k, \quad ' v_k = v_k - \pi_k,$$

который, согласно (65,2), показывает, что положение прямых, определяемых этими векторами, не зависит от нормализации. Но если нормализующие прямые совпадают с проективными нормальными, то $t_k = \partial_k \ln I = \omega_k = 0$, вследствие чего $n_k = v_k = 0$. Таким образом, вектор n_k определяет положение проективной нормали, расположенной в касательной плоскости, а вектор v_k — положение проективной нормали, проходящей через точку поверхности.

3. Директрисы Вильчинского. Рассмотрим вектор, определяемый формулой (116,8). Согласно

(1), (2) и (116,10)

$$z_k = 3\theta_k - \mu_k = 3c_k - n_k - t_k = 3\gamma_k - v_k + t_k.$$

Две прямые, которые определяются векторами

$$\delta_k = \frac{z_k - t_k}{2}, \quad d_k = \frac{z_k + t_k}{2}, \quad (3)$$

называются *директрисами Вильчинского*.

Так как векторы (3) выражаются через векторы осей Чеха и проективных нормалей так, что

$$\delta_i = \frac{3\gamma_i - v_i}{2}, \quad d_i = \frac{3c_i - n_i}{2}, \quad (4)$$

т. е. по формулам деления в данном отношении, то каждая из соответствующих им прямых принадлежит пучку, образованному соответствующими осями Чеха и проективными нормальями, составляя с ними и с прямой, расположенной в касательной плоскости или проходящей через точку поверхности, постоянное ангармоническое отношение. Из формул (67,4) следует, кроме того, что *директрисы сопряжены полярно относительно квадрики Ли*.

Если директрисы приняты за нормализующие прямые, то $z_i = 0$, $t_i = 0$, $B_{.jk}^i = t_{.jk}^i$ и формула (116,7) принимает вид

$$\overset{c}{\nabla}_k B_{.ij}^k = \overset{c}{\nabla}_k t_{.ij}^k = 0,$$

что, согласно (35,10), равносильно условию

$$\rho_{ij} = R_{ij}, \quad (5)$$

т. е. в этом случае тензоры Риччи внутренних связностей совпадают между собой. Но, согласно (110,4), $\rho_{ij} - \pi_{ij} = \lambda b_{ij}$, а значит, *развертывающиеся поверхности конгруэнций, образованных директрисами, соответствуют между собой (§ 110)*.

Можно показать, что требование этого соответствия для конгруэнции нормализующих прямых, которые сопряжены друг другу относительно поверхности L_2 , характеризует директрисы Вильчинского.

4. **К а н о н и ч е с к и й п у ч о к.** В предыдущем пункте было показано, что соответствующие оси Чеха, проективные нормали и директрисы Вильчинского при-

надлежат одному пучку. Всякую прямую одного из этих пучков можно определить вектором

$$k_i = \frac{ad_i + bn_i}{a + b} = \lambda (d_i - n_i) + n_i. \quad (6)$$

При постоянном отношении λ , образуемом данной прямой k_i с директрисой, нормалью и осью, эта прямая описывает одну из *канонических конгруэнций поверхности* и называется также *канонической прямой*. Согласно этому определению каноническая прямая, лежащая в касательной плоскости поверхности, но не проходящая через ее точку, определяется вектором (6), а каноническая прямая, полярная первой относительно соответствующих L_2 , определяется вектором

$$\kappa_i = \lambda (\delta_i - v_i) + v_i. \quad (7)$$

При $\lambda = 0$ мы получим проективную нормаль, при $\lambda = 1$ — директрису Вильчинского, а при $\lambda = \frac{2}{3}$ — ось Чеха.

§ 118. Специальные типы поверхностей

Так как векторы d_i и n_i преобразуются при изменении нормализации по одинаковому закону $'n_k = n_k - p_k$, $'d_k = d_k - p_k$, то их разность — *вектор*

$$\psi_i = d_i - n_i \quad (1)$$

есть инвариант изменения нормализации. Используя (117,2), (117,3) и (116,8), мы получим для ψ_i следующее выражение, справедливое при любой нормализации:

$$\psi_i = -\frac{1}{2I} (\sigma \overset{c}{\nabla}_r B^r_{.mn} D^{mn}_{..i} + \partial_i I + 2I \omega_i). \quad (2)$$

Вектор любой прямой канонического пучка выразится теперь так:

$$k_i = \lambda \psi_i + n_i; \quad (3)$$

в частности, вектор оси Чеха

$$c_i = \frac{2}{3} \psi_i + n_i, \quad (4)$$

откуда

$$\theta_i = \frac{2}{3} \psi_i + \partial_i \ln I + \omega_i. \quad (5)$$

Если поверхность нормализована своими проективными нормальными, т. е. средняя связность риманова, и если $I = \text{const}$, то $\omega_k = 0$, а значит,

$$\psi_i = \frac{3}{2} \theta_i. \quad (6)$$

Итак, вектор ψ_i составляет $3/2$ чебышевского вектора сети пучка Дарбу, вычисленного по отношению к средней римановой связности, индуцируемой на поверхности ее проективными нормальными. Мы будем называть эту связность *нормальной*.

Так как сопряженные сети ортогональны относительно средней метрики, то мы будем иметь, согласно (101,11), для гауссовой кривизны нормальной связности

$$K = \frac{2}{3} \operatorname{div} \psi. \quad (7)$$

Условие изометрической сопряженности сетей пучка Дарбу в нормальной метрике имеет вид (102,5), т. е. $\operatorname{rot} \theta = 0$, что, согласно (6), при любой нормализации равносильно условию

$$\operatorname{rot} \psi = 0. \quad (8)$$

Последнее условие, так как оно независимо от нормализации, характеризует поверхности особого класса, которые называются *изотермо-асимптотическими*.

Если поверхность нормализована своими проективными нормальными, то прямые канонического пучка определяются векторами

$$k_i = \kappa_i = \lambda \psi_i, \quad (9)$$

а переход к нормализации с помощью той прямой этого пучка, которая соответствует данному постоянному значению λ , сопровождается составным преобразованием с символом $(\lambda \psi_i, \lambda \psi_i)$. Чтобы это преобразование не нарушало эквивалентности внутренних связностей, которая имеет место при нормализации проективными нормальными, необходимо и достаточно, чтобы вектор ψ_i был градиентным. Но эквивалентность пары внутренних связностей равносильна сопряженности и гармоничности нормализующих конгруэнций. Таким образом, *изотермо-асимптотические поверхности характеризуются тем, что все канонические*

конгруэнции поверхности сопряжены или гармоничны этой поверхности.

Особым видом изотермо-асимптотических поверхностей являются так называемые *поверхности совпадения*, которые характеризуются условием

$$\psi_i = 0. \quad (10)$$

Из (3) следует, что для этих поверхностей характерно совпадение всех прямых канонического пучка между собою.

Если поверхность отнесена к асимптотическим координатам, то уравнение ее линий Сегре, согласно (96,18) и (96,18'), имеет вид

$$\beta dx^3 - \gamma dy^3 = 0, \quad (11)$$

а уравнение линий Дарбу —

$$\beta dx^3 + \gamma dy^3 = 0. \quad (12)$$

Каждая тройка линий Сегре и Дарбу имеет по крайней мере одну действительную линию, определяемую уравне-

ниями $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}}$, $\frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}}$. Эти линии, вме-

сте взятые, определяют сопряженную сеть

$$\beta^{2/3} dx^2 - \gamma^{2/3} dy^2 = 0. \quad (13)$$

Для изотермо-асимптотических поверхностей эта сеть должна быть изотермической, а это значит, что при соответствующем выборе параметров вдоль асимптотических эти поверхности характеризуются условием

$$\beta = \gamma. \quad (14)$$

Для поверхностей совпадения, кроме того, в силу (10) и (7) гауссова кривизна нормальной связности

$$K = 0 \quad (15)$$

при условии $I = \text{const}$, которое в силу (21,11) и (96,18') принимает вид $I = 4 \frac{\beta\gamma}{b_{12}} = \text{const}$, так что риманова связ-

ность, определяемая тензором b_{ij} , в данном случае евклидова, а сеть (13) при этом же условии декартова, согласно тому, что было изложено в пункте 1 § 117 об осях Чеха, которые совпадают теперь с проективными нормальными. Но в таком случае $b_{12} = \text{const}$ при $\beta = \gamma$, и, следовательно, поверхности совпадения характеризуются условием $\beta = \gamma = \text{const}$.

ГЛАВА IX

ПОВЕРХНОСТИ ТРЕХМЕРНОГО КОНФОРМНОГО ПРОСТРАНСТВА

§ 119. Основные уравнения поверхности

Нормализация поверхности $x = x(u^1, u^2)$ конформного пространства M_3 определяется заданием круга, расположенного на сферах y_1 и y_2 , которые в точке X пересекаются со сферой ξ , касающейся поверхности в точке x . Скалярные произведения векторов, определяющих указанные точки и сферы, определяются таблицей (79,9), которая в рассматриваемом нами случае принимает следующий вид:

	x	y_i	X	ξ
x	0	0	1	0
y_j	0	g_{ij}	0	0
X	1	0	0	0
ξ	0	0	0	1

(1)

а основные уравнения, связывающие те же величины, запишутся, согласно (79,10), так:

$$\left. \begin{aligned}
 \partial_i x &= y_i + l_i x, & (A) \\
 \nabla_j y_i &= l_j y_i + p_{ji} x - g_{ji} X + b_{ji} \xi, & (B) \\
 \partial_j \xi &= -g^{kl} b_{jk} y_l - n_j x, & (C) \\
 \partial_j X &= -l_j X - g^{kl} p_{jk} y_l + n_j \xi. & (C^*)
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Условия интегрируемости этой системы будут иметь вид (79,11), однако тот факт, что в нашем случае поверхность имеет только два измерения, позволяет значительно упростить условия (79,2VI). Действительно, при $n = 2$ тензор кривизны вполне определяется заданием тензора Риччи, а для последнего, свертывая обе части упомянутых

условий (79,2VI) по индексам m и k , мы получим

$$R_{ji} = p_{ij} - p_{ji} - g^{kl} p_{kl} g_{ij} + 2b_{i[j} b_{k]l} g^{kl}.$$

Приводя подобные члены и принимая во внимание, что, согласно (7,12),

$$2b_{i[j} b_{k]}^h = \varepsilon_{jkh} g^{kl} b_i^s b_{sl} = B g_{ij}, \quad (3)$$

где

$$B = \frac{b}{g} = \frac{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}, \quad (4)$$

окончательно получим

$$R_{ji} = (B - g^{kl} p_{kl}) g_{ij} + p_{.s}^s \varepsilon_{ij} *).$$

Таким образом, условия интегрируемости системы основных уравнений сведутся к следующим:

$$\left. \begin{aligned} b_{[ij]} &= 0, & p_{[ji]} + \nabla_{[j} l_{i]} &= 0; & (A) \\ K &= B - g^{kl} b_{kl}, & Q &= p_{.s}^s, & (I) \\ \nabla_{[k} b_{j]i} + b_{i[k} l_{j]} + g_{i[k} n_{j]} &= 0, & (II) \\ \nabla_{[k} p_{j]i} &= b_{i[j} n_{k]}, & (III) \\ \nabla_{[j} n_{i]} - l_{[i} n_{j]} - g^{kl} b_{k[j} p_{i]l} &= 0, & (C) \end{aligned} \right\} \quad (B) \quad (5)$$

причем следует принять во внимание, что внутренняя связность — вейлева, ее основной и дополнительный тензоры связаны условием

$$\nabla_k g_{ij} = 2l_k g_{ij}, \quad (6)$$

а ее тензор Риччи имеет вид

$$R_{ji} = K g_{ij} + Q \varepsilon_{ij}. \quad (7)$$

Согласно общей теории нормализованная поверхность M_3 определяется с точностью до преобразования группы Мёбиуса заданием своей внутренней вейлевой связности, угловая метрика которой определяется угловой метрикой внешнего пространства, и заданием тензоров b_{ij} , p_{ij} и n_i , удовлетворяющих условиям (5).

*) Начиная с этого момента мы снова перебрасываем индексы с помощью бивектора, согласованного с тензором g_{ij} .

§ 120. Направляющий круг последовательности сфер

В § 83 мы ввели понятие опорной сферы направления v^i , принадлежащего нормализованной поверхности, как такой сферы, которая проходит через нормализующее многообразие и ортогональна данному направлению. Построим вектор этой сферы

$$v = v^k y_k \quad (1)$$

и будем дифференцировать его, используя ковариантное дифференцирование внутренней связности и основные уравнения. При этом

$$d^1 v = \delta v^k y_k + (p_{sk} x - g_{sk} X + b_{sk} \xi) v^k du^s. \quad (2)$$

В том же § 83 мы определили направляющий круг последовательности опорных сфер, как такой круг, который проходит через точку x поверхности ортогонально опорной сфере и другой сфере семейства, бесконечно близкой к данной. Таким образом, если направляющий круг определен пересечением двух сфер μ и ν , то эти сферы должны удовлетворять условиям

$$\mu x = \nu x = 0, \quad (a) \quad \mu \nu = \nu \nu = 0, \quad (b)$$

$$\mu dv = \nu dv = 0. \quad (c)$$

Если мы выберем эти сферы так, чтобы первая из них касалась поверхности, а вторая проходила через точку x и была ортогональна касательной сфере и сфере ν , то векторы μ и ν представятся в виде

$$\mu = \xi - p x, \quad \nu = \tilde{v}^k y_k - q x^*)$$

и условия (a) и (b) будут выполнены автоматически. Приняв во внимание условие (c) и используя уравнение (2), мы получим

$$\mu = \xi - \frac{b_{ij} v^i du^j}{g_{rs} v^r du^s} x, \quad \nu = \tilde{v}^k y_k + \frac{v_j \delta v^j}{g_{rs} v^r du^s} x. \quad (3)$$

Если опорная сфера ортогональна du^i и касательному направлению кривой $x = x(t)$, то направляющий круг совпадает с кругом кривизны этой кривой и, следовательно,

*) Согласно обозначениям § 88 $\tilde{v}^k = g^k_m v^m$ есть вектор, ортогональный v^i .

не зависит от нормализации поверхности. Таким образом, круг кривизны определяется пересечением сфер

$$\mu = \xi - \frac{b_{ij} du^i du^j}{g_{rs} du^r du^s} x, \quad \nu = \tilde{du}^k y_k + \frac{du_i \delta du^i}{g_{rs} du^r du^s} x, \quad (4)$$

где δ — символ абсолютного дифференцирования в направлении кривой.

Первая из этих сфер, касающаяся поверхности, зависит только от направления касательной к рассматриваемой кривой, откуда и вытекает известная теорема Менье: *круги кривизны всех линий, проходящих на поверхности и касающихся друг друга в данной ее точке, принадлежат одной сфере*. В дальнейшем мы будем называть эту сферу сферой Менье данного направления.

Если направление ν^i переносится параллельно по отношению к внутренней связности, то

$$\nu_k \delta \nu^k = 0$$

и сфера $\nu = \tilde{\nu}^k y_k$ проходит через нормализующий круг. Таким образом, мы снова приходим к общему результату § 83, согласно которому параллельное перенесение направления во внутренней связности $M(X_2)$ характеризуется тем, что направляющий круг опорных сфер этого направления лежит на одной сфере с нормализующим кругом.

В частности, отсюда же следует, что геодезическая линия внутренней связности характеризуется тем, что ее круг кривизны лежит на одной сфере с нормализующим кругом поверхности.

В конформной геометрии принято называть *циклической системой* двухпараметрическое семейство линий на поверхности, если круги кривизны всех линий семейства, проходящих через данную точку, пересекаются с одним и тем же кругом в других точках. Согласно этой терминологии *геодезические линии внутренней связности $M(X_2)$ образуют циклическую систему*.

§ 121. Круги, ортогональные поверхности

Если отобразить M_3 на Q_3 в P_4 , то точки этого P_4 будут соответствовать сферам M_3 , а прямая — тому кругу в M_3 , соответствующему кривой второго порядка, по которой Q_3 пересекается с полярной плоскостью этой прямой.

В частности, если нормализованная поверхность $M(X_2)$ отображена в полярно нормализованную поверхность $N(\bar{X}_2)$, то круги, ортогональные первой, будут соответствовать прямым, расположенным в касательной плоскости второй. Но, согласно (57,6), последние можно задать точками

$$z_i = y_i + a_i x, \quad (1)$$

поставив их в однозначное соответствие с ковариантными векторами аналитического многообразия криволинейных координат u^1, u^2 . Таким образом, всякому ковариантному вектору, заданному в многообразии криволинейных координат $M(X_2)$, соответствует круг, ортогональный этой поверхности и определяемый сферами z_i по формуле (1).

Зададим три коектора, находящиеся в зависимости

$$a_i = \frac{\lambda a'_i + \mu a''_i}{\lambda + \mu}. \quad (2)$$

Прямые, соответствующие этим коекторам в P_4 , образуют пучок (§ 24) с центром в некоторой точке C . Следовательно, круги S, S' и S'' , ортогональные $M(X_2)$ и определяемые коекторами a_i, a'_i, a''_i , связанными условиями (2), принадлежат одной сфере.

В частности, предположим, что

$$a_i = \frac{a'_i + a''_i}{2}. \quad (3)$$

В таком случае в P_3 векторам a_i, a'_i, a''_i соответствуют три прямые l, l', l'' , расположенные в плоскости, касательной к $\bar{X}_2$, принадлежащие одному пучку и образующие гармоническую четверку l', l'', l, t с прямой t , которая соединяет центр C этого пучка с точкой $\bar{A}$ поверхности $\bar{X}_2$. Рассмотрим P_3 , полярное центру C этого пучка. Это P_3 пересекает Q_3 по квадрике Q_2 , которая изображает сферу, содержащую круги S', S'' и S . Но P_3 пересекает прямые l', l'', l в трех точках L', L'', L , которые лежат на прямой, касающейся Q_3 в точке A , и образуют гармоническую четверку L', L'', L, A . Отсюда следует, однако, что круги S', S'' и S принадлежат одному параболическому пучку, причем круги S' и S'' сопряжены в инвер-

сии относительно S , или, иначе, круг S будет средним по отношению к S' и S'' .

Итак, *круг S , ортогональный поверхности, будет средним по отношению к кругам S' и S'' , если координаты a_i , a'_i и a''_i , определяющие их положение, связаны соотношением (3).*

Предположим, что мы изменяем нормализацию поверхности, выбирая новый нормализующий круг так, что он определяется пересечением сфер

$$\check{y}_i = y_i + p_i x. \quad (4)$$

Связь между нормализаторами старой и новой нормализации имеет вид

$$\check{l}_i = l_i - p_i. \quad (5)$$

С другой стороны, основной тензор внутренней связности

$$g_{ij} = y_i y_j = \partial_i x \partial_j x$$

не зависит от нормализации, и, следовательно, условие (5) замены l_i , являющегося дополнительным тензором той же метрики, совпадает с условием (44,2) и показывает, что *при замене нормализации $M(X_2)$ внутренняя связность испытывает конформное преобразование, вектор p_i которого равен вектору, определяющему положение новой нормали по отношению к старой нормализации.*

Полный произвол в выборе вектора p_i показывает, что заменой нормализации можно добиться любого конформного преобразования внутренней связности, а так как все X_2 конформны между собою, то, значит, *всякую связность W_2 можно осуществить как внутреннюю связность любой X_2 при соответствующей ее нормализации.*

Если вектор круга

$$z_i = y_i + a_i x$$

остается инвариантным при замене нормализации, то

$$z_i = y_i + p_i x + (a_i - p_i) x = \check{y}_i + \check{a}_i x,$$

и, следовательно, вектор, определяющий положение круга, ортогонального поверхности и остающегося инвариантным

при изменении нормализации, преобразуется по закону

$$\check{a}_i = a_i - p_i, \quad (6)$$

где p_i определяет положение новой нормали.

В частности, так как геодезический вектор Γ_i некоторой сети преобразуется при конформном преобразовании связности по формуле (100,13):

$$\check{\Gamma}_i = \Gamma_i - p_i,$$

а p_i есть вектор конформного преобразования внутренней связности $M(X_2)$, то положение круга

$$z_i = y_i + \Gamma_i x \quad (7)$$

не зависит от выбора нормализации. Назовем этот круг *присоединенным* к сети, заданной на поверхности. Приняв присоединенный круг за нормализующий, мы будем иметь

$$\Gamma_i = 0, \quad (8)$$

вследствие чего сеть станет геодезической сетью внутренней связности, а это значит, что круг кривизны каждой из линий сети лежит на одной сфере с присоединенным кругом. Итак, *присоединенный круг сети характеризуется тем, что он ортогонален поверхности и лежит на одной сфере с каждым из кругов кривизны линий сети.*

§ 122. Основные тензоры поверхности

В этом и следующем параграфах мы отметим некоторые свойства поверхности, связанные с рассмотрением тензоров b_{ij} и p_{ij} , компоненты которых служат вместе с g_{ij} коэффициентами основных уравнений поверхности. Тензоры g_{ij} , b_{ij} и p_{ij} будем называть соответственно *первым, вторым и третьим тензорами поверхности.*

Заметим, прежде всего, что второй и третий тензоры зависят от выбора сферы ξ , касающейся поверхности. Действительно, если произвести замену этой сферы, полагая

$$\check{\xi} = \xi - \lambda x, \quad (1)$$

то вершина нормализующего круга — точка X , которая, по условию, принадлежит выбранной нами касательной

сфере, — тоже изменит свое положение, переместившись по нормализующему кругу, и ее вектор преобразуется по формуле (28,8):

$$\check{X} = X + \lambda \xi - \frac{\lambda^2}{2} x. \quad (2)$$

Сравнивая новые и старые основные уравнения (119,2С) и (119,2С*) и приняв во внимание, что внутренняя связность зависит только от выбора нормализующего круга, а не от выбора касательной сферы, мы без труда получим следующие формулы преобразования тензоров b_{ij} и p_{ij} :

$$\check{b}_{ij} = b_{ij} + \lambda g_{ij}, \quad \check{p}_{ij} = p_{ij} + \lambda b_{ij} + \frac{\lambda^2}{2} g_{ij}. \quad (3)$$

Отметим, кроме того, используемое впоследствии соотношение

$$\check{n}_i = n_i + l_i \lambda + \partial_i \lambda. \quad (4)$$

Таким образом, каждому выбору касательной сферы ξ соответствуют свои значения второго и третьего тензоров.

Рассмотрим сеть линий

$$b_{ij} du^i du^j = 0, \quad (5)$$

которые будем называть *релятивно-асимптотическими* линиями семейства сфер ξ , касающихся поверхности. Согласно (120,4) *круг кривизны этих линий лежит на сфере $\mu = \xi$.*

Будем называть *главными направлениями поверхности* такие ортогональные между собою направления ее касательной плоскости, которые гармонически разделяются некоторыми релятивно-асимптотическими направлениями, т. е. удовлетворяют условиям

$$g_{ij} v^i w^j = 0, \quad b_{ij} v^i w^j = 0. \quad (6)$$

Легко видеть, что *главные направления не зависят от выбора сфер ξ .* Действительно, заменяя эти сферы, мы будем иметь, согласно (3),

$$\check{b}_{ij} v^i w^j = 0.$$

Чтобы найти главные направления, воспользуемся обычным приемом. Согласно (6) векторы $b_{ij} v^j$ и $g_{ij} v^j$ будут коллинеарны вектору w_i и, следовательно, коллинеарны между

собой, так что

$$(b_{ij} - sg_{ij}) v^j = 0, \quad (7)$$

а условие существования ненулевого решения этой системы однородных уравнений имеет вид характеристического уравнения

$$\text{Det} \| b_{ij} - sg_{ij} \| = 0,$$

которому можно также придать вид

$$s^2 - 2Hs + B = 0, \quad (8)$$

где

$$2H = g^{rs} b_{rs}, \quad B = \frac{b}{g} = \frac{1}{2} b^{rs} b_{rs}. \quad (9)$$

Так как форма $g_{ij} du^i du^j$ положительно определенная, то корни характеристического уравнения S_1 и S_2 будут действительны, и, следовательно, главные направления существуют на всякой действительной поверхности M_3 , так же как и огибающие эти направления линии, которые называются, как известно, линиями кривизны поверхности.

Мы получим простую геометрическую характеристику главных направлений, рассматривая направляющие круги их опорных сфер.

Согласно (120,3) направляющий круг принадлежит касательной сфере поверхности

$$\mu = \xi - \frac{b_{ij} v^i du^j}{g_{rs} v^r du^s} x,$$

которая, вообще говоря, зависит от направления смещения du^i . Однако для главных направлений, соответствующих корням s_1 и s_2 характеристического уравнения, соответствующие сферы

$$\mu_1 = \xi - s_1 x, \quad \mu_2 = \xi - s_2 x, \quad (10)$$

не зависят от du^i . Они же, очевидно, совпадают и со сферами Менье линий кривизны. Назовем их главными касательными сферами поверхности.

Итак, главные направления характеризуются тем, что все направляющие круги опорных сфер этих направлений лежат на сферах Менье линий кривизны, т. е. на главных касательных сферах поверхности.

Наряду с главными сферами рассматривается сфера ζ , касающаяся поверхности так, что главные сферы сопряжены в инверсии относительно этой сферы. Такая сфера ζ называется *центральной сферой* поверхности, и, согласно (121,3), ее вектор имеет вид

$$\zeta = \xi - \frac{s_1 + s_2}{2} x = \xi - Hx, \quad (11)$$

где s_1 и s_2 — корни характеристического уравнения (8), а $2H$ — коэффициент при первой степени s в этом уравнении.

Если касательная сфера $\xi = \zeta$, т. е. является центральной сферой поверхности, то

$$2H = g^{rs}b_{rs} = 0, \quad (12)$$

и релятивно-асимптотическая сеть ортогональна. Но асимптотические направления разделяются гармонически направлениями линий кривизны, и мы приходим к следующему результату: *центральные сферы поверхности характеризуются тем, что их релятивно-асимптотическая сеть является биссекторной сетью линий кривизны.*

Главные направления поверхности остаются неопределенными, если первый и второй тензоры поверхности отличаются множителем, т. е.

$$b_{ij} + \lambda g_{ij} = 0.$$

Чтобы исследовать этот случай, сделаем соответствующую замену касательных сфер. Согласно (3) после такой замены

$$b_{ij} = 0,$$

а тогда из условия интегрируемости (119,5VIII) следует

$$g_{i[k}n_{j]} = \varepsilon_{kj}g_{ir}n^r = 0,$$

или

$$n_i = 0,$$

и уравнение (119,2C), принимая вид

$$\partial_i \xi = 0,$$

показывает, что все точки поверхности x принадлежат неподвижной сфере. Итак, сфера характеризуется неопределенностью своих главных направлений.

В заключение рассмотрим квадратичную форму

$$d\xi^2 = e_{ij} du^i du^j,$$

выражающую квадрат элемента угла между двумя смежными касательными сферами поверхности.

В силу уравнения (119,2C)

$$e_{ij} = b_{ir} b_{js} g^{rs}. \quad (13)$$

С другой стороны, вследствие (119,3)

$$2g^{rs} b_{i[j} b_{r]s} = g^{rs} b_{rs} b_{ij} - g^{rs} b_{ri} b_{sj} = Bg_{ij},$$

или

$$e_{ij} - 2Hb_{ij} + Bg_{ij} = 0, \quad (14)$$

где H и B имеют тот же смысл, что и в (9).

Если сфера ξ центральная, то для нее $H = 0$ и

$$e_{ij} = -Bg_{ij}, \quad (15)$$

так что *угловая метрика центральных сфер конформна угловой метрике поверхности.*

§ 123. Фокальные точки нормализующего круга

Будем искать фокальные точки конгруэнции нормализующих кругов, т. е. те точки, в которых эти круги касаются полостей огибающей поверхности. Если $\check{X}$ — фокальная точка, то существует такое направление сдвига, при котором точка $\check{X} + d\check{X}$ остается на нормализующем круге и

$$\check{X}y_i = 0, \quad d\check{X}y_i = 0. \quad (1)$$

Перемещая вершину нормализующего круга в точку $\check{X}$ и пользуясь уравнением (119,2C*), мы преобразуем второе условие к виду

$$\check{p}_{ik} du^k = 0. \quad (2)$$

Если точка $\check{X}$ не совпадает с вершиной нормализующего круга, а выражается, как всякая точка этого круга, по формуле (122,2), так что

$$\check{X} = X + \lambda \xi - \frac{\lambda^2}{2} x, \quad (3)$$

то условие (2) принимает, согласно (122,3), вид

$$\left(p_{ik} + \lambda b_{ik} + \frac{\lambda^2}{2} g_{ik}\right) du^k = 0. \quad (4)$$

Исключая du^k , мы приходим к характеристическому уравнению четвертого порядка

$$\text{Det} \left\| p_{ik} + \lambda b_{ik} + \frac{\lambda^2}{2} g_{ik} \right\| = 0, \quad (5)$$

каждому корню которого соответствует фокус, определяемый по формуле (3). Таким образом, мы видим, что *конгруэнция кругов имеет, вообще говоря, четыре фокальные поверхности.*

Смещения du^k , определяемые из (4) и соответствующие некоторому корню λ_k характеристического уравнения, определяют семейство касающихся du^k линий нормализованной поверхности, которые мы будем называть *фокальными линиями*, соответствующими данной *фокальной поверхности*. Фокальные линии, соответствующие некоторому корню $\lambda_i = \mu$ уравнения (5), остаются неопределенными, если

$$p_{ik} + \mu b_{ik} + \frac{\mu^2}{2} g_{ik} = 0.$$

Перемещая вершину нормали в фокус, соответствующий корню μ , мы будем иметь в этом случае $\check{p}_{ik} = 0$.

§ 124. Гармоническая нормализация

В § 61 мы установили понятие такой совокупности нормалей второго рода поверхности проективного пространства, которая гармонична нормализуемой поверхности, определив ее условием

$$p_{[ij]} = 0, \quad (1)$$

т. е. условием симметрии тензора p_{ij} . Будем теперь говорить, что *многообразие нормализующих кругов $M(X_2)$ гармонично поверхности*, если при отображении на проективное пространство совокупность нормалей второго рода гармонична поверхности $\bar{X}_2$, изображающей данную. Условием гармонизма нормализации $M(X_2)$ по-прежнему будет равенство (1).

Чтобы установить геометрический смысл этого условия, рассмотрим фокусы нормализующих кругов и будем различать два случая:

- 1) существует по крайней мере два различных фокуса,
- 2) все четыре фокуса совпадают между собой.

В первом случае различным фокусам соответствуют различные корни характеристического уравнения и различные фокальные линии, определяемые уравнениями

$$\begin{aligned} \left(p_{ik} + \lambda_1 b_{ik} + \frac{\lambda_1^2}{2} g_{ik} \right) d_1 u^k &= 0, \\ \left(p_{ik} + \lambda_2 b_{ik} + \frac{\lambda_2^2}{2} g_{ik} \right) d_2 u^k &= 0. \end{aligned}$$

Свертывая первое уравнение с $d_2 u^i$, второе с $d_1 u^i$ и вычитая, получим

$$2p_{[ik]}d_1 u^k d_2 u^i - (\lambda_1 - \lambda_2) \left[b_{ik} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} g_{ik} \right] d_1 u^k d_2 u^i = 0.$$

Так как корни λ_1 и λ_2 и направления $d_1 u_i$ и $d_2 u_i$ различны, то необходимым и достаточным условием симметрии p_{ik} будет соотношение

$$\left(b_{ik} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} g_{ik} \right) d_1 u^k d_2 u^i = 0,$$

которое показывает, что направление фокальных линий гармонически разделяется релятивно-асимптотическими направлениями сферы

$$\check{\xi} = \xi - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} x, \quad (2)$$

так как, согласно (2), (122,1) и (122,3),

$$\check{b}_{ik} d_1 u^k d_2 u^i = 0,$$

где $\check{b}_{ik} = b_{ik} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} g_{ik}$ — второй тензор, соответ-

ствующий этой сфере. Но, согласно (121,3), сфера $\check{\xi}$ — средняя для сфер $\xi_1 = \xi - \lambda_1 x$ и $\xi_2 = \xi - \lambda_2 x$, которые проходят через фокусы

$$X_1 = X + \lambda_1 \xi - \frac{\lambda_1^2}{2} x, \quad X_2 = X + \lambda_2 \xi - \frac{\lambda_2^2}{2} x.$$

Рассмотрим теперь второй случай, предположив, что все корни уравнения (123,5) совпадают между собой и, следовательно, на всяком нормализующем круге существует только один фокус. Поместив точку X в этот фокус, мы должны потребовать, чтобы все корни уравнения (123,5) были равны нулю, а это значит, что и его свободный член, и коэффициенты при младших степенях λ равны нулю. В частности,

$$p_{11}p_{21} - p_{22}p_{12} = 0, \quad p_{11}b_{22} + p_{22}b_{11} - (p_{12} + p_{21})b_{12} = 0.$$

Если тензор p_{ij} симметричен, то в силу первого из этих соотношений его можно представить как

$$p_{ij} = p_i p_j;$$

тогда второе соотношение примет вид

$$b_{ij}p^i p^j = 0.$$

Но направление фокальной линии определится из соотношения

$$p_{ik}du^k = 0,$$

откуда либо $du^i = \lambda p^i$, и тогда $b_{ij}du^i du^j = 0$, т. е. du^j совпадает с асимптотическим направлением, либо $p^i = 0$, т. е. фокальная линия остается неопределенной.

Таким образом, нормализующая конгруэнция $M(X_2)$ гармонична поверхности, если она имеет различные фокусы и направления фокальных линий, соответствующих этим фокусам, гармонически разделяются релятивно-асимптотическими направлениями сферы, которая является средней по отношению к касательным сферам поверхности, проходящим через эти фокусы. Если же все фокусы нормализующей конгруэнции совпадают между собой, то она будет гармонична поверхности, если фокальная линия совпадает с релятивно-асимптотической линией касательной сферы, проходящей через фокус, или если эта фокальная линия остается неопределенной.

Так как симметрия тензора p_{ij} , согласно условию (119,5BII), равносильна равенству

$$Q = 0, \quad (3)$$

а это равенство характеризует внутреннюю связность как риманову, то нормализация, гармоническая поверхность, характеризуется тем, что соответствующая ей внутренняя связность поверхности риманова.

В случае римановой связности дополнительный ковектор градиентен, и мы можем так перенормировать вектор точки поверхности x , чтобы l_i обратился в нуль. Это нормирование совпадает с тем каноническим нормированием, которое было введено нами в § 66 для $N(X_m)$, когда многообразие нормалей второго рода было гармонично поверхностью. При условии канонического нормирования в основных уравнениях и в условиях их интегрируемости продолженное дифференцирование можно заменить обыкновенным, а K считать гауссовой кривизной внутренней римановой связности с линейным элементом

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j. \quad (4)$$

Так как выбор канонического нормирования точки x равносителен выбору нормализующей конгруэнции, гармоничной поверхности, и выбору нормирования метрического тензора g_{ij} , то мы будем говорить в дальнейшем, что *гармоническая нормализация определяется выбором линейного элемента внутренней связности.*

§ 125. Нормализация, определяемая касательными сферами

Будем говорить, что *нормализация определяется касательными сферами* ξ , если нормализующий круг соединяет точку поверхности с соответствующей точкой второй полости огибающей этого семейства сфер. Приняв точку этой полости за вершину нормали X , согласно этому определению имеем

$$X\xi = 0, \quad (X + dX)\xi = 0,$$

а вследствие (119,2С *)

$$dX\xi = n_i du^i = 0$$

и, так как du^i произвольно,

$$n_i = 0. \quad (1)$$

Чтобы охарактеризовать внутреннюю связность, определенную заданием касательных сфер ξ , рассмотрим связность, которая сопряжена с нею относительно релятивно-асимптотической сети. По отношению к этим сопряженным связностям справедливо

$$\nabla_k b_{(i)j} = 2\omega_k b_{ij}, \quad (2)$$

откуда, вследствие (119,5BII),

$$\nabla_{[k} b_{(i)]j} = \nabla_{[k} b_{i]j} = 2\omega_{[k} b_{i]j} = l_{[k} b_{i]j}$$

и, если b_{ij} не вырождается,

$$2\omega_k = l_k. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь производную второго рода тензора e_{ij} угловой метрики сфер ξ . Согласно (122,13)

$$\nabla_k e_{(i)(j)} = \nabla_k g^{rs} b_{r(i)} b_{s(j)} = (l_k - 2\omega_k) e_{ij},$$

или

$$\nabla_k e_{(i)(j)} = 0, \quad (4)$$

а это значит, что метрика второго рода будет римановой, а ее линейный элемент

$$d\sigma^2 = d\xi^2 = d\varphi^2, \quad (5)$$

где $d\varphi$ есть угол смежности сфер ξ .

Итак, если касательные сферы имеют сеть релятивно-асимптотических линий, то внутренняя связность, соответствующая нормализации, определенной этими сферами, сопряжена с римановой связностью угловой метрики этих сфер относительно их релятивно-асимптотической сети.

Если нормализация определена сферами ξ и X есть точка полости огибающих этих сфер, то нормализующие круги пересекают ортогонально не только поверхность, описанную точкой x , но и поверхность, описанную точкой X . Будем искать третью поверхность, обладающую тем же свойством.

Пусть точка этой поверхности

$$z = X + \lambda\xi - \frac{\lambda^2}{2} x. \quad (6)$$

По условию нормализующий круг пересекает эту поверхность ортогонально, поэтому ее касательная сфера может быть выбрана так, что станет одновременно и касательной сферой поверхности x , т. е. определится вектором

$$\zeta = \xi - \lambda x.$$

Условием прикосновения этой сферы к поверхности z будет

$$dz \zeta = 0,$$

или, так как $z\zeta = 0$ и согласно (122,1) и (122,2),

$$X d\xi = \left(X + \lambda\xi - \frac{\lambda^2}{2} x \right) (d\xi - d\lambda x - \lambda dx).$$

Принимая во внимание (119,2С*) и (1), мы получим искомое условие прикосновения

$$\partial_i \lambda + \lambda l_i = 0, \quad (7)$$

показывающее, что нормализатор l_i должен быть градиентом, а если это имеет место, то точка z определяется по формуле (6), где

$$\lambda = c \exp \left(- \int l_i du^i \right),$$

т. е. с произволом в выборе постоянной интегрирования c .

Итак, если существуют три поверхности, пересекающие ортогонально данную конгруэнцию кругов, то существует и ∞^1 таких поверхностей.

Конгруэнция кругов, обладающая этим свойством, называется *конгруэнцией Рибокура*.

Учитывая результаты предыдущего параграфа и соотношение (7), мы приходим к следующему результату: для того чтобы нормализующая конгруэнция, определенная касательными сферами, была конгруэнцией Рибокура, необходимо и достаточно, чтобы она была гармонична поверхности.

Основные уравнения и условия их интегрируемости для поверхности, нормализованной конгруэнцией Рибокура и нормированной канонически, можно получить из (119,2), полагая

$$l_i = n_i = 0, \quad (8)$$

$$Q = 0, \quad (9)$$

причем K — гауссова кривизна римановой метрики с линейным элементом

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j.$$

Отметим, что, вследствие симметрии тензора p_{ij} и (8), условие (119,5С) равносильно линейной зависимости тензоров p_{ij} , b_{ij} и g_{ij} (§ 20).

§ 126. Нормализация, определенная сетью

Будем говорить, что *нормализация определена сетью линий поверхности*, если нормализующий круг присоединен к этой сети в смысле § 121, т. е. если эта сеть является геодезической во внутренней связности, соответствующей

нормализации. Если нормализация определена ортогональной сетью, то, так как это декартова ортогональная сеть внутренней связности, эта связность будет квазиевклидовой. Обратно, если внутренняя связность квазиевклидова, то ортогональная сеть, образованная двумя семействами линий полей абсолютно параллельных направлений, — геодезическая и нормализация определяется этой сетью.

Таким образом, для того чтобы внутренняя связность $M(X_2)$ была квазиевклидовой, необходимо и достаточно, чтобы нормализация была определена ортогональной сетью.

Как показано в § 101, евклидова связность характеризуется тем, что ее ортогональные декартовы сети — изотермические, и, таким образом, для того чтобы внутренняя связность была евклидовой, необходимо и достаточно, чтобы нормализующая конгруэнция определялась изотермически ортогональной сетью.

Рассмотрим теперь поверхность, находящуюся в произвольной нормализации N' , и некоторую ортогональную сеть этой поверхности, определяемую тензором a_{ij} и имеющую чебышевский вектор a_i по отношению к внутренней связности G' , соответствующей нормализации N' . Если связность G'' сопряжена связности G' по отношению к сети a_{ij} , то она конформна связности G' и вектор соответствующего конформного преобразования равен $2a_i$ (§ 98, пункт 7). Но в таком случае средняя связность G связностей G' и G'' квазиевклидова и может считаться конформной со связностью G' , причем вектор соответствующего конформного преобразования будет равен a_i (§ 98). Однако со всяким конформным преобразованием внутренней геометрии $M(X_2)$ связан переход к нормализации с нормализующим кругом, определенным вектором конформного преобразования (§ 121). Поэтому связностям G' , G'' и G соответствуют нормализующие круги, определенные векторами a'_i , a''_i , a_i , а так как

$$a_i = \frac{a'_i + a''_i}{2},$$

то, согласно § 121, мы приходим к следующей теореме: для того чтобы внутренние связности G' и G'' поверхности, нормализованной двумя различными способами, были

сопряжены относительно некоторой ортогональной сети этой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы средний круг двух данных нормализующих кругов был присоединен к этой сети.

§ 127. Канонические круги

Нормализующие круги, которые определяются заданием самой поверхности, назовем *каноническими* и рассмотрим три таких круга.

1. *Первый канонический* (или просто *нормальный*) *круг* есть круг, определенный центральными сферами поверхности, т. е. он ортогонален этой поверхности и соединяет ее точку с соответствующей точкой второй полости огибающей центральных сфер.

2. *Второй канонический* (или *псевдонормальный*) *круг* есть круг, присоединенный сети линий кривизны, т. е. лежит на пересечении сфер, нормальных поверхности и проходящих через соприкасающиеся круги линий кривизны.

3. *Третий канонический круг* есть такой канонический круг, который определяется линейным элементом, равным квадрату дифференциала угла между центральными сферами, что возможно, так как угловая метрика этих сфер конформна угловой метрике поверхности (формула (122,15)).

Каждому из канонических кругов, принятых за нормализующий, соответствует внутренняя связность, которую мы будем называть *первой, второй и третьей канонической связностью* соответственно.

Третья каноническая связность, по определению, есть такая риманова связность, линейный элемент которой равен угловому элементу центральных сфер.

Первая каноническая связность, согласно результатам § 125, сопряжена третьей канонической связности относительно релятивно-асимптотической сети центральных сфер, т. е. относительно биссекторной сети линий кривизны. Но если базис сопряженной пары является ортогональной сетью, то всякая другая ортогональная сеть, линии которой будут изогональными траекториями линий данного базиса, есть базис той же пары связностей.

Итак, *первая и третья канонические связности сопряжены относительно сети линий кривизны.*

Вторая каноническая связность соответствует нормализации, определенной ортогональной сетью линий кривизны, т. е. является квазиевклидовой и конформной по отношению к первой и третьей каноническим связностям, причем базис пары этих связностей будет декартовой сетью третьей канонической связности. Отсюда следует, что *вторая каноническая связность является квазиевклидовой и средней по отношению к первой и третьей каноническим связностям.*

Принимая во внимание результат предыдущего параграфа, мы приходим к следующему заключению: *второй канонический круг является средним по отношению к первому и третьему.*

Переходя к рассмотрению частных случаев, потребуем, чтобы один из двух первых канонических кругов образовывал конгруэнцию, гармоничную поверхности. В этом случае соответствующая внутренняя связность будет римановой, а так как третья каноническая связность всегда риманова, то, согласно пункту 5 § 53, все три канонические связности будут римановы. Таким образом, *если одна из двух первых канонических конгруэнций гармонична поверхности, то и все три канонические конгруэнции гармоничны ей.*

Так как в рассматриваемом случае средняя связность будет необходимо евклидовой, то, согласно § 126, базисная сеть, т. е. сеть линий кривизны, будет изотермической, что характеризует изотермическую поверхность. Итак, *изотермическая поверхность характеризуется тем, что все ее канонические конгруэнции гармоничны этой поверхности.*

В заключение рассмотрим такую поверхность, у которой канонические круги совпадают между собой. Приняв канонический круг за нормализующий, произведя каноническое нормирование и предположив, что ξ есть центральная сфера, мы будем иметь

$$2H = 0, \quad B = -1, \quad n_i = 0,$$

причем второе условие следует из того, что основной тензор внутренней связности, определяющийся, вообще говоря, по формуле (122,5), совпадает с e_{ij} , а третье, согласно (125,1), соответствует тому факту, что нормализующий

круг определен центральными сферами. Вследствие первых двух условий характеристическое уравнение (122,8) примет вид

$$s^2 - 1 = 0,$$

и смещения $d_1 u^i$, $d_2 u^i$ вдоль главных направлений удовлетворяют условиям

$$b_{ik} d_1 u^k = g_{ik} d_1 u^k, \quad b_{ik} d_2 u^k = -g_{ik} d_2 u^k,$$

а главные сферы поверхности определяются векторами

$$\xi_1 = \xi + x, \quad \xi_2 = \xi - x.$$

Дифференцируя каждый из этих векторов по соответствующему главному направлению, мы получим

$$d_1 \xi_2 = d_1 \xi - d_1 x = -b_{ik} g^{kl} \partial_l x d_1 u^i - d_1 x = 0$$

и, аналогично,

$$d_2 \xi = 0.$$

Таким образом, каждая из главных сфер поверхности остается неизменной при движении по одной из линий кривизны, и, следовательно, поверхность может двумя различными способами рассматриваться как огибающая однопараметрического семейства сфер. Такая поверхность называется *циклидой Дюпена*. Итак, *совпадение трех канонических кругов имеет место у циклиды Дюпена*.

§ 128. Поверхности пространства постоянной кривизны

В § 84 было показано, что внутренняя связность такого конформного пространства, которое нормализовано заданием соответствия инверсии относительно некоторой фиксированной сферы A , есть связность пространства постоянной кривизны, а геодезические линии, т. е. прямые этого пространства постоянной кривизны, совпадают с кругами, переходящими в себя при инверсии, т. е. ортогональными абсолюту A .

Если в пространстве, нормализованном таким образом, задана поверхность X_m и ее нормализация подчинена нормализации пространства, т. е. ее нормализующая сфера S_{n-m} , проходящая через точку x поверхности, проходит и через точку X , сопряженную x в абсолютной инверсии, то во внутренней связности M_n , т. е. в геометрии постоян-

ной кривизны, эта сфера S_{n-m} является плоскостью, которая нормальна поверхности. Что же касается внутренней связности на поверхности, то, согласно общей теории подчиненных нормализаций, эта связность совпадает с той, которая индуцируется на поверхности внешней метрикой постоянной кривизны. Иными словами, *геометрия поверхностей конформного пространства, нормализованных так, что их нормализующие круги переходят в себя при абсолютной инверсии, совпадает с геометрией поверхностей того пространства постоянной кривизны, связность которого есть внутренняя связность пространства, нормализованного с помощью той же инверсии.*

Это обстоятельство позволяет применить все результаты общей теории нормализованных поверхностей конформного пространства к поверхностям, заданным в пространстве постоянной кривизны, что мы и сделаем для случая двумерных поверхностей трехмерного пространства.

Итак, будем рассматривать геометрию трехмерного пространства постоянной кривизны как внутреннюю геометрию M_3 , нормализованного с помощью задания абсолютной инверсии. Нормаль поверхности будет с конформной точки зрения нормализующим кругом, соединяющим точку поверхности x с точкой X , сопряженной x в абсолютной инверсии. Касательная плоскость поверхности есть с той же точки зрения сфера ξ , касающаяся поверхности в точке x и проходящая через вершину нормали X . Асимптотические линии поверхности характеризуются тем, что их соприкасающиеся плоскости, а следовательно, и круги кривизны лежат в касательной плоскости, и, таким образом, асимптотические линии поверхности суть *релятивно-асимптотические* линии касательных сфер, проходящих через вершину нормали, т. е. точку X .

Линии кривизны поверхности пространства постоянной кривизны соответствуют огибающим нормалей и, следовательно, являются *фокальными* линиями нормализации. Но направления линий кривизны гармонически разделяются асимптотическими направлениями, а это значит, что *с конформной точки зрения конгруэнция нормализующих кругов гармонична поверхности*. В полном согласии с этим обстоятельством и внутренняя связность поверхности пространства постоянной кривизны будет римановой. Так как сфера ξ проходит через точки x и X , сопряженные

в инверсии, то она переходит в себя при этой инверсии. Но инверсия есть такое преобразование, которое сохраняет прикосновение двух поверхностей, и, следовательно, поверхность, описанная точкой X , огибает семейство касательных сфер ξ . Таким образом, рассматриваемая нами нормализация определена семейством касательных плоскостей. Однако если нормализующие круги определены касательными плоскостями и одновременно образуют конгруэнцию, гармоничную поверхности, то это есть конгруэнция Рибокура. Итак, с конформной точки зрения нормали поверхности пространства постоянной кривизны образуют конгруэнцию Рибокура. В согласии с общей теорией конгруэнций Рибокура нормальные конгруэнции допускают существование ∞^1 поверхностей, для которых они служат общими нормальными. Как известно, эти поверхности называются *параллельными между собою*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б у ш м а н о в а Г. В., Н о р д е н А. П., Элементы конформной геометрии, Изд-во Казанского ун-та, 1972.
2. К а г а н В. Ф., Основы теории поверхностей. Гостехиздат, ч. I, 1947, ч. II, 1948.
3. К а р т а н Э., Геометрия римановых пространств, ОНТИ, 1936.
4. К а р т а н Э., Пространства аффинной, проективной и конформной связностей, Изд-во Казанского ун-та, 1962.
5. К л е й н Ф., Неевклидова геометрия, ОНТИ, 1936.
6. К л е й н Ф., Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа»). В сборнике «Об основаниях геометрии», Гостехиздат, 1956, 399—434.
7. Н о р д е н А. П., О внутренних геометриях поверхностей проективного пространства, Труды семин. по векторн. и тензорн. анализу, 6, 1948, 125—224; 7, 1949, 31—64.
8. Н о р д е н А. П., Теория поверхностей, Гостехиздат, 1956.
9. Р а ш е в с к и й П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, изд. 3, «Наука», 1967.
10. Р о з е н ф е л ь д Б. А., Неевклидовы геометрии, Гостехиздат, 1955.
11. Р о з е н ф е л ь д Б. А., Многомерные пространства, «Наука», 1966.
12. Р о з е н ф е л ь д Б. А., Неевклидовы пространства, «Наука», 1969.
13. С х о у т е н И. А. и С т р о й к Д. Д., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, ОНТИ, т. 1, 1939; т. 2, 1948.
14. Ф и н и к о в С. П., Проективно-дифференциальная геометрия, ОНТИ, 1937.
15. Ш и р о к о в П. А., Тензорное исчисление, изд. 2, Изд-во Казанского ун-та, 1961.
16. Ш и р о к о в П. А., Избранные работы по геометрии, Изд-во Казанского ун-та, 1966.
17. Ш и р о к о в П. А. и Ш и р о к о в А. П., Аффинная дифференциальная геометрия, Физматгиз, 1959.
18. Ш у л и к о в с к и й В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, Физматгиз, 1963.
19. Ш у л и к о в с к и й В. И., Проективная теория сетей, Изд-во Казанского ун-та, 1964.
20. B l a s c h k e W., Vorlesungen über Differentialgeometrie, Springer, Berlin, т. 1, 1921; т. 2, 1924; т. 3, 1929.
Имеется русский перевод первого тома: Б л я ш к е В., Дифференциальная геометрия, т. 1, ОНТИ, 1935.
21. B o l G., Projective Differentialgeometrie, Göttingen, ч. 1, 1950; ч. 2, 1954; ч. 3, 1967.
22. F u b i n i G., Č e c h E., Geometrie proiettive differenziale, Roma, т. 1, 1920; Bologna, т. 2, 1927.
23. F u b i n i G., Č e c h E., Introduction à la géométrie projective-différentielle des surfaces, Paris, 1931.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолют 101
Аддитивность 83
Альтернирование 25
Аполярности условие 180
Атлас 110
Аффинор 35
— единичный 38
— неособенный 36
— обратный 37
— поворота 294
Аффинора след 36
Аффиноры сопряженные 38

База 188
Базис 13
— взаимный 18
— местный 56
— ортонормированный 50
— пары сопряженных связностей 319
Бельтрами теорема 348
Бианки—Падова тождество 131
Бивектор 34
— обратный 34

Валентность 21
Вейерштрасса координаты 88
— нормирование 88
Вейля пара связностей 325
— пространство 153
— — проективно-евклидово 170
— связность 291
Вейнгартена поверхность 350
Вектор 11
— геодезический 337
— гиперсферы 102
— главного направления аффинора 36
— дополнительный 152
— изотропного направления 51
— касательной направляющий 52
— ковариантный 18
— контравариантный 18
— конформного преобразования 161
— конформно-чебышевский 336
— координатный 54
— направления касательной 52
— отрезка 41
— преобразования нормали второго рода 207
— чебышевский 175
— — второго рода 175
Векторы когреддиентные 18
— контрагреддиентные 18
— противоположные 11
— сопряженные 293
Вектор-функция линейная 15
Версор 292

Вертор 31
Вершина нормали первого рода 198, 220
— проективного репера 60
Вес спутника псевдовеличины 192
— тензора 191
Вильчинского директрисы 397

Гаусса и Кодацци условия 349
Геометрия внутренняя $M(X_m)$ 276
— — $N(X_m)$ 201
— — инверсии 280
— Лобачевского 89
— релятивная 247
— риманова постоянной кривизны 282
— сетей 308
Гиперплоскости уравнение 45
Гиперплоскость 44
— внешняя 87
— внутренняя 87
— изотропная 87
— касательная 72, 216
— несобственная 90
— нецентральная 46
— нормальная 220
— опорная 220
— радикальная 97
— центральная 46
Гиперповерхность 55
— второго порядка 71
— — — вырожденная 71
— нормализованная 219
— производящая гармонического соответствия 249
— расслояющая 241
Гиперпрямая 219
Гиперсфера 101
— абсолютная инверсии 108
— касательная 272
— нормальная кривой 273
— соприкасающаяся 273
Гиперсферы ортогональные 102
Градиент 124
— сети 335
Грина ось 358
— ребро 358
— средние прямые 362
— теорема 298
Группа аффинных преобразований 41
— движений E_n 95
— — K_n 81
— Лоренца 95
— Мёбиуса 402
— ортогональная 49
— фундаментальная 41
— центроаффинная 46

- Дарбу линия 320, 392
 — направление 320
 — пучок 393
 Двойственности принцип 64
 Дефект корреляции 67
 — поляритета 81
 Дивергенция 299
 — интегральная 299
 Дини теорема 347
 Директрисы Вильчинского 397
 Дискриминант 29
 Дифференциал абсолютный 117
 — — смешанный 168
 Дифференцирование продолженное 192
 — псевдовеличин 191
 — смешанное 136
 Длина дуги 55, 160
 — отрезка 49
 Дубнова теорема 342
 Дюпена циклида 421

 Зависимость линейная векторов 12
 — — гиперплоскостей 64
 — — гиперсфер 103
 — — операторов 17
 — — точек 60
 Закон переместительный 11, 12
 — распределительный 12
 — сочетательный 11, 12
 Значение собственное 36
 — тензора на системе векторов 21

 Изгибание проективное 390
 Инвариант аффинора 36
 — внутренний 375
 — составного преобразования 180
 Инварианты внутренние 375
 — Лапласа—Дарбу 373
 — однородные 375
 — разнородные 376
 Инверсия 105
 — гиперболическая 105
 — параболическая 105
 — эллиптическая 105
 Инволюции аполярные 77
 — комполярные 77
 Инволюция 74
 — гиперболическая 74
 — параболическая 74
 — полярная 82
 — эллиптическая 74
 Индикатриса нормалей 247
 — сети 313
 — — параболической 316
 — — полугеодезической 315
 — — чебышевской 315
 Интерпретация конформная K_n 108
 — Пуанкаре 280
 Инцидентности место поляритета 69
 Инцидентность 62
 Ионаса поверхность 380
 — сеть 380

 Карта локальная 110
 Касательная 52, 193
 Квадрат скалярный вектора 48
 Кёнигса сеть 382
 — — двойная 382
 Класс аффинный 243
 — проективной вложимости 243

 Ковектор 18
 — направляющий гиперплоскости 44, 62
 Кодацци сеть 324
 — уравнение 169
 — — обобщенное 176
 Кодацциева пара связностей 324
 Комбинация линейная векторов 12
 — — — тривиальная 12
 — — гиперплоскостей 64
 Компонента существенная n -вектора 32
 Конгруэнция каноническая 398
 — нормальная 272
 — поля 357
 — прямолинейная 271
 — Рибокура 417
 Константа масштабная 49
 Контравектор 31
 Конус изотропных направлений 184
 Координаты асимптотические 379
 — Вейерштрасса 88
 — вектора 13
 — — ковариантные 30
 — — контравариантные 6
 — декартовы 45
 — изотермические 300
 — изотропные 301
 — ко вектора 17
 — криволинейные 56, 113
 — локальные 110
 — нормальные 131
 — оператора 17
 — тензора 26
 — — промежуточного 136
 — эквивалентные 47
 Корреляции дефект 67
 — ранг 66
 Корреляция 67
 — второго рода 67
 — необратимая 67
 — первого рода 67
 — специальная 67
 Коши—Римана условия 301
 Коэффициенты связности 122
 Кривая 51, 113, 193
 — допустимая 147
 — E_n 51
 — M_n 272
 — P_n 193
 — R_n 51
 — X_n 113
 Кривизна 125
 — гауссова 307
 — интегральная 306
 — кривой 56
 — полная 349
 — присоединенной связности 337
 — продолженная 192
 — скалярная S_n 171
 — средняя 349
 Кривизны круг 273
 — линия 409
 — тензор 125
 Кристоффеля символ 133
 — скобки 133
 Кронекера символ 18
 Круг 102

Круг канонический 419

- — второй 419
- — первый 419
- — третий 419
- кривизны 273
- направляющий 273
- нормальный 273, 419
- присоединенный 407
- псевдонормальный 419
- соприкасающийся 273
- средний 405

Кручение 125

Кручения тензор 125

Лапласа поле 299

- уравнение 300, 373

Лапласа—Дарбу инварианты 373

Лаптева Г. Ф. теорема 144

Леви-Чивита параллельное перенесение 140

Ли поверхность 234, 359

Линия асимптотическая 55, 218

- геодезическая 144
- — второго рода 322
- — двойная 322
- главная второго рода 371
- — первого рода 229, 371
- Дарбу 320, 392
- координатная 55
- кривая 52
- кривизны 409
- поля 357
- релятивно-асимптотическая 408
- Сегре 320, 392
- тени коническая 365
- — цилиндрическая 366
- фокальная 412
- t 322

Лиувилля метрика 348

- поверхность 351
- сеть 343

Лобачевского геометрия 89

Лоренца группа 95

Матрица обратная 20

- якобиева 54

Менье сфера 404

- теорема 404

Мёбиуса группа 402

- преобразование 101

Место инцидентности поляритета 69

Метрика гиперболическая 89

- Лиувилля 343
- проективная 84
- — второго рода 84
- — постоянной кривизны 255
- угловая внешняя 252
- — внутренняя 252
- — гиперболическая 292
- — гиперповерхности 257
- — эллиптическая 292
- эллиптическая 89

Многообразие дифференцируемое 110

- линейное 42
- нормализующее 198
- сопряженное гиперповерхности 230

Многообразие среднее 235

- — второго рода 235
- — первого рода 235
- характеристическое корреляции 67
- — семейства гиперплоскостей 217
- — касательных гиперплоскостей 217
- — связи 64

Модуль аффинного преобразования 47

Монжа теорема 367

Наложимость проективная 390

Направление асимптотическое 218

- вектора допустимое 147
- главное аффинора 36
- — поверхности 408
- Дарбу 320
- изотропное 294
- Сегре 320
- t 322

Направления напряженные 309

Норма вектора 48, 158

Нормали взаимно полярные 233

- взаимные 233

Нормализатор 192

- второго рода 220
- первого рода 220

Нормализации перспективные 215

- равносильные 391

Нормализация автополярная 266

- аффинная 242
- — сопряженная 246
- взаимная 234
- внешняя 253
- внутренняя 253
- вполне гармоничная 231
- гармоничная 209
- евклидова 257, 385
- — неособая 385
- — особая 387
- обратная 270
- общая 240
- , определенная сетью 417
- , определяемая касательными сферами 415

- подчиненная 203

- полярная 251

- — внешняя 253

- — внутренняя 253

- — пространства 255

- проективная 197

- — пространства 210

- связкой сфер 283

- семейством сфер 280

- сильная 206

- сопряженная 230

- — аффинная 246

Нормаль аффинная 247

- виртуальная 232

- второго рода 198, 353

- — — виртуальная 200

- первого рода 198, 353

- проективная 240, 395

- средняя 235

Нормирование Вейерштрасса 88

- каноническое 209

- натуральное 158

- Нормирование псевдовеличины 59
 — псевдоканоническое 304
 Нуль-вектор 11
 Нуль-оператор 17
 Образ дифференцируемый 111
 Образующая прямолинейная 72
 Объект касательного расслоения 201
 — связности дифференциальный 115
 Объем параллелотопа 47, 158
 Огибающая 229
 Оператор линейный 16
 Ортогональность характеристических направлений 105
 Оснащение естественное 154
 — метрическое 154
 — проективное 197
 Основание главное изгибаия 351
 — нормали второго рода 220
 — Фосса 351
 Ось Грина 358
 — Чеха 395
 — — второго рода 395
 — — первого рода 395
 Относительности принцип 95
 Отображение геодезическое 109, 165
 — дифференцируемое 109
 — конформное 302
 — сферическое 259
 Отношение ангармоническое 61
 — — двух сетей 310
 — — относительно сети 309
 — векторов 293
 — отрезков 44
 — точек 61
 — R 358
 Отрезки ортогональные 49
 Отрезок 41
 Пара конгруэнций вполне расслоенная 368
 — — расслоенная 368
 — связностей Вейля 325
 — — геодезическая 187, 324
 — — — риманова 347
 — — евклидова 187, 330
 — — квазиевклидова 330
 — — кодацциева 182, 324
 — — конформная 326
 — — метрическая 184
 — — полугеодезическая 324
 — — риманова 185, 329
 — — самосопряженная 176
 — — чебышевская 181, 324
 — — — эквиаффинная 324
 — — эквиаффинная 182, 324
 Параллелизм абсолютный векторов 134
 — — направлений 171
 Параллелотоп 47
 Параметр канонический геодезической линии 145
 — — оснащенной кривой 144
 Перенормирование вектора 193, 195
 Перенос параллельный вектора 114
 — — внутренний 140
 — — второго рода 322
 — — направления 148
 — — первого рода 322
 — — средней связности 322
 Перенос параллельный в смысле Леви-Чивита 140
 — — коектора 116
 Переноса сеть 366
 Перспективность точек и гиперплоскостей 65
 Плоскости вполне ортогональные 50, 85
 — ортогональные 50
 — параллельные 43
 Плоскость 42, 62
 — ассоциированная 355
 — касательная 196
 — несобственная 90
 — нецентральная 46
 — нормальная X_m 157, 353
 — опорная 206
 — соприкасающаяся 52, 194
 — центральная 46
 Плотность ковариантная 33
 — основная 151
 Поверхности параллельные 423
 — проективно наложимые 390
 Поверхность 54, 113, 195
 — Вейнгартена 350
 — вращения 351, 381
 — второго класса 72
 — — — вырожденная 72
 — — — порядка 71, 384
 — — — мнимая 71
 — изотермическая 350
 — изотермо-асимптотическая 399
 — изотропная 252
 — Ионаса 380
 — Ли 234, 359
 — Лиувилля 351
 — минимальная 351, 381
 — нормализованная 353
 — — конформного пространства 274
 — орисферическая 108
 — оснащенная 141, 197
 — переноса 367
 — постоянной гауссовой кривизны 390
 — проективно-нормализованная 197
 — развертывающаяся 229
 — с двойной сетью Кёнигса 382
 — совпадения 400
 — соприкасающаяся 234
 — фокальная 357, 412
 — Фосса 351
 — Чеха 412
 — эквиабсолютная 281
 — эквидистантная 108
 — R 384
 — R_0 389
 Поверхности параллельные 423
 — проективно-наложимые 390
 Поворота аффинор 294
 Подгруппа аффинная 41
 — ортогональная 49
 Поле абсолютно параллельных векторов 134
 — геодезическое 357
 — Лапласа 299
 — линий в X_2 297
 — направлений 356
 — поворотов 303
 — расслоенное 297

- Поле соленоидальное 299
- сопряженное 300
- тензоров регулярное 121
- Поливектор 26, 32
- простой 32
- Поливекторы дополнительные 261
- Полус 68
- Поля трансверсаль 316
- Поляра 68
- главная сети 313
- первая 212
- Поляритет 68
- абсолютный 81
- — нормализации 252
- вполне вырожденный 89
- геодезический 186
- гиперболический 86
- основной 151
- соприкасающийся 233
- эллиптический 86
- Поляры взаимные 69
- Порядок отображения 110
- Последовательность нормальная сферических элементов 273
- направлений сопряженная 355
- — тангенциальная 355
- Поток ковектора 299
- Предел переменного тензора 38
- Преобразование аффинное 41
- градиентное 346
- допустимое расслоенного пространства 188
- конформное 101
- конформно-риманово 340
- координат 19
- кососимметрическое 181
- Мёбиуса 101
- непрерывное 51
- ортогональное 49
- — собственное 49
- проективное 60
- — пары 180
- — связности 166
- — — градиентное 346
- связности 128
- симметрическое 181
- составное 179
- унимодулярное 47
- эквиаффинное 47
- Прикосновения точка 52, 72
- Принцип двойственности 64
- относительности 95
- Проекция слоя на базу 188
- стереографическая 98
- Произведение аффинорное 37
- косое 32
- скалярное 48, 158
- тензоров 23
- Производная ковариантная 123
- — вектора 189
- — смешанная 138
- — тензора по скаляру 39
- Пространства, проективные друг другу 164
- Пространство аффинное 41
- аффинной связности 121
- — — без кручения 130
- — — неголономное 147
- Вейля 153
- векторное 11
- Пространство гиперболическое 89
- гиперплоскостей 63
- евклидово 48
- касательное векторное 111
- квазиевклидово 296
- конформное 101
- — нормализованное 278
- конформно-евклидово 164
- линейных элементов 147
- метрическое 151
- неголономное 192
- нормализованное 210
- нулевой кривизны 133
- — — и нулевого кручения 135
- отображения 112
- полусимметрическое 149
- постоянной кривизны 170
- проективное 60
- проективно-евклидово 168
- — — Вейля 170
- псевдоевклидово 51
- псевдонормальное 141
- расслоенное 188
- Римана 157
- собственно-евклидово 51
- соприкасающееся 120
- с проективной метрикой 81
- субпроективное 289
- Финслера 147
- центроаффинное 46
- эквиаффинное 47, 151
- эквипроективное 169, 348
- эллиптическое 89
- Прямая 43, 53
- ассоциированная 358
- — второго рода 358
- — первого рода 358
- — средняя 361
- Грина средняя 362
- каноническая 398
- проективная 73
- характеристическая последовательности инволюций 311
- Прямые ортогональные 85
- Псевдоаффинор 60
- Псевдовектор 59
- Псевдовеличина 59
- Псевдосвязность 148
- Пуанкаре интерпретация 280
- Пучок гиперплоскостей 65
- гиперсфер 105
- Дарбу 393
- канонический 397
- сетей 311
- Работа ковектора 298
- Радиус-вектор точки 41
- Развертка 354
- Развертывание кривой 119
- — метрическое 156
- Размерность 12
- Разность векторов 11
- Разрешимости условие 11
- Ранг корреляции 66
- Расслоение касательное 189
- нормальное 200
- Расстояние 49, 83
- Растяжение интегральное 306
- присоединенной связности 337

- Ребро Грина 358
 Репер 42
 — автополярный 69
 — подвижной 56
 — приведенный 190
 — проективный 60
 Рибокура конгруэнция 417
 Римана—Кристоффеля тензор 125
 Римана пространство 157
 Риччи сеть 347
 — тензор 151
 — — пространства гиперплоскостей 214
 Ротор интегральный 299
 — дополнительного вектора 157
 — коектора 298
- Свертывание двух тензоров 25
 — тензора 24
 Свойство дифференцируемое 111
 Связка 64
 — второго класса 72
 — гиперплоскостей 72
 — гиперсфер 103
 — — гиперболическая 103
 — — параболическая 103
 — — эллиптическая 103
 — нормализованная 214
 — m измерений 64, 103
 Связки сопряженные 105
 Связности взаимные 129
 — коэффициенты 57
 — объект 115
 — сопряженные 175
 — — без кручения 176
 — — X_2 318
 Связность аффинная 114
 — — внутренняя 354
 — — — второго рода 354
 — — — первого рода 354
 — вдоль кривой 114
 — Вейля 291
 — внешняя 203
 — внутренняя 201
 — — второго рода 221
 — — инверсии проективная $k-1$ раз 289
 — — первого рода 221
 — дифференцируемая 114
 — индуцированная 142
 — каноническая 419
 — — вторая 419
 — — первая 419
 — — третья 419
 — метрическая 153
 — — постоянной кривизны 255
 — нормальная 399
 — опорная 206
 — полусимметрическая 149
 — присоединенная 337
 — — проективно 345
 — пространства проективно-евклидова риманова 308
 — — Финслера 147
 — расслоенного пространства 189
 — собственная 133
 — средняя 129
 — — пары сопряженных связностей 176
- Связность эквивариантная 150
 Сегре линия 320, 392
 — направление 320
 — тензор 393
 Секущая 52
 Семейство расслояющее 297
 Середина отрезка 44
 Сети аполярные 310
 — изогональные 310
 Сеть 309
 — асимптотическая 323
 — асимптотически-геодезическая 323
 — асимптотически-чебышевская 323
 — биссекторная 332
 — геодезическая 315, 337
 — — особенная 341
 — геодезически-ромбическая 341
 — главная 310
 — декартова 317
 — изогональная 337
 — изотермическая 337, 341
 — изотермически-ортогональная 418
 — изотермически-сопряженная 362, 380
 — Ионаса 380
 — Кёнигса 382
 — — двойная 381
- Кодаци 324
 — конформно-геодезическая 340
 — конформно-чебышевская 340
 — Лиувилля 343
 — особенная 345
 — параболическая 316
 — переноса 366
 — полугеодезическая 314
 — прямолинейных образующих 323
 — равных инвариантов 380
 — расслояющая 381
 — Риччи 347
 — ромбическая 341
 — с декартовой биссекторной сетью 337
 — сопряженная 323
 — — геодезическая 323
 — — чебышевская 323
 — Фосса 323
 — чебышевская 315, 340
 — — первого рода 359
 — R 384
 Символ Кристоффеля 133
 — Кронекера 18
 Симметрирование 25
 Система координат нормальная 131
 — — общая 127
 — циклическая 404
 Скобки Кристоффеля 133
 След аффинора 36
 — оператора на векторе 16
 — тензора 25
 — — кратный 29
 — — на векторе 21
 — — на коекторе 21
 — частичный 24
 Сложение векторов 11
 — тензоров 21
 Слой 188
 Соответствие гармоническое 211
 — геодезическое 165
 — двойственное 210

Соответствие инволюционное 279
 — конформное 160
 — коррелятивное 66
 — проективное 165
 Сопряженность относительно сети 309
 — параллельных перенесений 173
 — связностей 175
 — точек 68
 Сумма линейных операторов 16
 — тензоров 21
 Сфера 49
 — абсолютная инверсии 279
 — вырожденная 103
 — касательная 272
 — — главная 409
 — Менье 404
 — мнимая 96
 — нормализующая 274
 — нормальная 273
 — нулевого радиуса 96
 — опорная 275
 — — второго рода 279
 — — направления 276
 — — первого рода 278
 — характеристическая 103
 — центральная 410
 — m измерений 102
 — E_n 95
 — K_n 101, 108
 Сферы ортогональные 102

Тензор 21
 — аффинной деформации 128
 — бесконечно малый 38
 — дискриминантный 158
 — единичный 22
 — ковариантной производной 123
 — ковариантный 21
 — контравариантный 21
 — кососимметричный 26
 — кривизны 125
 — — расслоенного пространства 189
 — — W_2 305
 — кручения 125
 — метрический 58
 — — основной поверхности 274
 —, обратный основному 30
 — основной 29, 58
 — — кодацциевой пары 182
 — поверхности второй 407
 — — первый 407
 — — третий 407
 — промежуточный 136, 188
 — Римана—Кристоффеля 125
 — Риччи 151
 — — пространства гиперплоскостей 214
 — с векторными компонентами 199
 — связующий 136
 — Сегре 393
 — сети третий чебышевский 336
 — симметричный 26
 — — неособенный 29
 — смешанный 21
 — чебышевский сети 319
 — — — линий кривизны 350
 Тензоры аполярные 78
 — дополнительные 152

Теорема Бельтрами 348
 — Грина 298
 — Дини 347
 — Дубнова Я. С. 342
 — Лаптева Г. Ф. 144
 — Менье 404
 — Монжа 367
 — Шлефли 159
 Тожества Бианки—Падова 131
 Тип тензора 21
 Точка ассоциированная 355
 — внешняя 86
 — внутренняя 86
 — единичная 60
 — изотропная 87
 — неособенная 274
 — несобственная 100
 — нормализуемая 278
 — нормализующая 278
 — нормальная 200, 202, 220, 353
 — нулевая тензора 78
 — опорная 220
 — особая 219
 — — корреляции 67
 — — кривой 196
 — — поверхности 196
 — прикосновения 52, 72
 — расслоенного пространства 188
 — фокальная 411
 — центральная 92
 — характеристическая 355
 Точки бесконечно близкие 51
 — сопряженные 61
 Траектории поля сопряженные 357
 Трансверсаль поля 316

Угол 49
 — взаимный двух сетей 310
 — — второго рода 325
 — между гиперплоскостью и гиперсферой 98
 — — двумя гиперплоскостями 50, 84, 98
 — — — гиперсферами 98
 — — — линиями 274
 — — — направлениями 153
 — — — относительно сети 309
 — — — отрезками 49
 — — — прямыми 84
 Умножение вектора на число 11
 — оператора на число 16
 — тензора на число 23
 — тензоров 23
 Уравнение внутреннее линии 54
 — гиперплоскости 45
 — гиперсферы 95
 — Кодаци 169
 — — обобщенное 176
 — Лапласа 300, 373
 — характеристическое 36
 Уравнения деривационные 57
 — основные 204
 — — $N(X_n)$ 223
 Условие аполярности 180
 — линейности 121
 — параллельного переноса вектора 57
 — разрешимости 11
 — сопряженности обобщенное 214

Условия Гаусса и Кодацци 349
— Коши—Римана 301

Финслера пространство 147
Форма инвариантная второго рода 374
— — первого рода 373, 374
— основная квадратичная гиперповерхности 217
— положительно определенная 51
Формы связности 115
Фосса основание 351
— поверхность 351
— сеть 323
Функция полилинейная 20
— скалярная векторного аргумента 15

Центр сферы 49
Циклида Дюпена 421
Циркуляция коектора 298

Четверка гармоническая 62
Чеха ось 395
— — второго рода 395
— — первого рода 395
— поверхность 412

Шлефли теорема 159

Элемент двойной инволюции 105
— линейный приводимый 288
— — проективный 238
— — первого рода 324
— площади второго рода 324
— угла между гиперплоскостями 260
— сферический 283

Якоби матрица 54
 A_n 121
 B_n 11
 C_n 164
 E_n 48
 $E(X_2)$ 385
 K_n 81

K — 1 раз проективная связность 289
 L_2 359
 M_n 101
 M -сфера 100
 M -точка 100
— несобственная 100
 $M(X_m)$ 274
 m -связка 103
 $N(M_n)$ 278
 $N(P_n)$ 210
 $N(X_m)$ 198
 $N(P_m)$ 214
 n -вектор 32
— дискриминантный 33
— основной 47
 P_n 60
 p -плоскость 42, 60
— касательная 55
— нецентральная 46
— соприкасающаяся 53
— центральная 46
 Q_{n-1} 70
— вырожденная 71
 R_n 41
 R_{n-m} 141
 $S(M, V)$ 188
 S_m 102
 S_n 170
 T_p 196
 t -линия 322
 t -направление 322
 V_n 157
 W_n 153
 $(X, B)_m$ 189
 X_m 195
 X_m -компонента тензора 142
 X_m^{m-1} 209
 (X_m, B_p) 188
 X_n 110
 X_n^1 271
 Π_m 64
 Σ_m 103

THE PROCESSION OF THE HOLY SPIRIT
IN THE CHURCH